

## Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente  
1º Semestre — 10/11/ 2004

Nome: _____
Número: _____ Curso: _____

**Duração:** 30 Minutos

**Cotação** das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1,2 v. Errada: -0,4v.

*A preencher pelo docente:*

Correctas	Erradas	TEM	PD
Nota			

1. Seja  $A$  uma matriz  $n \times k$  tal que a dimensão do espaço das colunas é 1, a dimensão do núcleo de  $A$  é 1 e a dimensão do núcleo de  $A^T$  é 3. Então [1.2]

- $n = 4$  e  $k = 2$       $n = 2$  e  $k = 2$       $n = 4$  e  $k = 5$       $n = 2$  e  $k = 4$

**Resposta** A opção correcta é a primeira.

*Comentário:* Como a dimensão do núcleo de  $A$  é 1 e a característica de  $A$  (que é igual à dimensão do espaço de colunas de  $A$ ) é 1 o número de colunas de  $A$  é 2. Por outro lado dado que a característica de  $A^T$  é igual à característica de  $A$  e a dimensão do núcleo de  $A^T$  é 3 temos que o número de colunas de  $A^T$  (que é o número de linhas de  $A$ ) é 4.

2. Para  $V = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : x - y = 0 \wedge w = t \wedge z = 0\}$ , diga qual das afirmações seguintes é verdadeira [1.2]

- A dimensão de  $V$  é 3.  
  $\{(0, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1, 1)\}$  é uma base de  $V$ .  
  $V$  não é um subespaço linear de  $\mathbb{R}^5$ .  
  $\{(1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0)\}$  é uma base de  $V$ .

**Resposta** A opção correcta é a última.

*Comentário:* Como  $V = Nuc \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$ ,  $V$  é um subespaço linear de

$\mathbb{R}^5$ . Dado que esta matriz tem 5 colunas e característica 3 a dimensão de  $V$  é 2. Para além disso, é fácil verificar que os vectores  $(1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 0)$  são linearmente independentes e pertencem a  $V$ .

---

**3.** No espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a dois,  $P_2$ , considere as afirmações seguintes: [1.2]

- I.  $\{1 + t, t^2, t - 1, 2 - t^2\}$  é linearmente independente.
- II. As coordenadas de  $p(t) = 5 - t$  na base ordenada  $B = (t + 1, t^2 - 1, t)$  são  $(5, 0, -6)$ .
- III.  $\{t, t^2\}$  é uma base de  $P_2$ .
- IV.  $\{0, t, t^2\}$  não é uma base de  $P_2$ .

A lista completa de afirmações correctas é:

- I e III                       II e IV                       II e III                       I e IV

**Resposta** A opção correcta é a segunda.

*Comentário:* Como um conjunto de vectores que inclua o zero nunca é linearmente independente e portanto não pode ser uma base de um espaço vectorial, a afirmação IV é verdadeira. O espaço de polinómios  $P_2$  tem dimensão 3 e portanto qualquer conjunto de 4 vectores é linearmente dependente e qualquer base tem 3 elementos pelo que as afirmações I e III são falsas. Além disso  $p(t) = 5(t + 1) - 6t$  e portanto a afirmação II é correcta.

---

**4.** Dê um exemplo de uma matriz  $3 \times 4$  cuja dimensão do núcleo seja 3. Determine para esta matriz uma base para o espaço das linhas, para o espaço das colunas e para o núcleo. [1.5]

**Resolução**

Para qualquer matriz  $M$  de tipo  $m \times n$  temos sempre  $\dim \mathcal{N}(M) + \text{car}(M) = n$ . Um exemplo como pedido terá então característica 1 e pode ser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para esta matriz, que está em escada de linhas e tem só um pivot, temos  $EL(A) = L(\{(1, 0, 0, 0)\})$ ,  $EC(A) = L(\{(1, 0, 0)\})$ , donde uma base para  $EL(A)$  é formada pelo vector  $(1, 0, 0, 0)$ , e uma base para  $EC(A)$  é formada pelo vector  $(1, 0, 0)$ .

Temos ainda  $\mathcal{N}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\} =$

$$= L(\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}).$$

Logo uma base para  $\mathcal{N}(A)$  é  $((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ .

---

---

5. Seja  $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  a matriz de mudança de base, da base  $B_1 \subset \mathbb{R}^2$  para a base  $B_2 \subset \mathbb{R}^2$  (ou seja  $x_{B_2} = Sx_{B_1}$  para  $x \in \mathbb{R}^2$ ).

- a) As coordenadas de um vector  $x$  na base  $B_2$  são  $x_{B_2} = (1, 2)$ . Determine as coordenadas de  $x$  na base  $B_1$ . [0.9]
- b) Determine a base  $B_2$  sabendo que  $B_1 = ((2, 1), (-1, 1))$ . [1.0]

### Resolução

- a) Como  $x_{B_2} = Sx_{B_1}$ , temos  $S^{-1}x_{B_2} = x_{B_1}$  ( $S^{-1}$  é a matriz de mudança de base, da base  $B_2$  para a base  $B_1$ ).

Calcula-se facilmente que  $S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Como  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , temos  $x_{B_1} = (0, 1)$ .

- a) (*Resolução alternativa*) Seja  $B_1 = (f_1, f_2)$ . Como a segunda coluna da matriz  $S$  é  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , as coordenadas de  $f_2$  na base  $B_2$  são  $(1, 2)$  ou seja  $f_2 = x$ . Logo  $x_{B_1} = (0, 1)$ .
- b) Seja  $B_2 = (e_1, e_2)$ . Como a matriz de mudança de base, da base  $B_2$  para a base  $B_1$ , é  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , temos  $e_1 = 2(2, 1) - (-1, 1) = (5, 1)$  e  $e_2 = -(2, 1) + (-1, 1) = (-3, 0)$ .
- b) (*Resolução alternativa*) Seja  $B_2 = (e_1, e_2)$  e  $S$  a matriz de mudança de base, da base  $B_1$  para a base  $B_2$ . Então, por definição de matriz de mudança de base temos que  $(2, 1) = e_1 + e_2$  e  $(-1, 1) = e_1 + 2e_2$ . Tomando para  $e_1 = (a, b)$  e  $e_2 = (c, d)$ , obtemos:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & a + c & 1 & = & b + d \\ -1 & = & a + 2c & 1 & = & b + 2d, \end{array}$$

cuja solução é  $e_1 = (5, 1)$  e  $e_2 = (-3, 0)$ .

---