2. Noções básicas de probabilidade

Palavras como

- provável (provavelmente)
- probabilidade
- acaso
- sorte

pertencem ao vocabulário corrente e são utilizadas com extrema frequência por todos, em parte por termos a convicção de que a natureza é mutável e incerta, de que o futuro encerra em si inúmeras possibilidades e de que o acaso governa o mundo.

Na formalização matemática actual, a probabilidade é um termo medindo o grau de possibilidade ou de credibilidade de ocorrência de um acontecimento.

2.1 Experiências aleatórias. Espaço de resultados. Acontecimentos. (2-1)

A formalização moderna de **Probabilidade** assenta nas nocões de

- experiência aleatória e seus possíveis resultados e de
- acontecimento.

Definição 2.1 — Experiência aleatória (E.A.)
Experiência cujo resultado exacto não pode ser predito antes da realização da mesma devido à intervenção do acaso. •

Nota 2.2 — No caso de a experiência aleatória poder ser repetida um grande número de vezes, em condições mais ou menos semelhantes, os resultados globais apresentam certa "regularidade estatística"... •

Exemplo 2.3 — **Experiências aleatórias**

Designação	Experiência aleatória (E.A.)
E_1	Registo do número de viaturas que atingem os $100Km/h$ em menos de 6 segundos, em 7 viaturas testadas
E_2	Contagem do número anual de acidentes de automóvel na A1
E_3	Medição da resistência de uma mola da suspensão de uma viatura

•

Definição 2.4 — **Espaço de resultados**
Conjunto de todos os resultados possíveis de uma E.A. É conhecido antes de a E.A. se realizar e é usualmente representado pela letra grega Ω. •

Nota 2.5 — Ω diz-se:

- discreto — caso $\#\Omega$ seja finito ou infinito numerável;
- contínuo — se $\#\Omega$ for infinito não numerável. •

Exemplo 2.6 — **Espaços de resultados**
Na tabela seguinte figuram os espaços de resultados das três experiências aleatórias apresentadas no Exemplo 2.3:

E.A.	Espaço de resultados (Ω)	Classificação de Ω
E_1	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	Discreto (finito)
E_2	$\{0, 1, 2, \ldots\}$	Discreto (infinito numerável)
E_3	$\mathbb{R}^+$	Contínuo (infinito não numerável)

•

Definição 2.7 — **Acontecimento (evento)**
Designação dada a qualquer subconjunto do espaço de resultados. •

Nota 2.8 — Em relação a uma dada E.A. diz-se que o evento A ocorreu sse o resultado da E.A. pertencer a A. •

Exemplo 2.9 — **Eventos**
De seguida apresentam-se alguns eventos associados às três experiências aleatórias descritas no Exemplo 2.3:

E.A.	Evento
E_1	$A =$ "nenhuma das 7 viaturas testadas atingiu os $100Km/h$ em menos de 6 segundos" $= \{0\}$ $B =$ "pelo menos 4 das 7 viaturas testadas atingiu os $100Km/h$ em menos de 6 segundos" $= \{4, 5, 6, 7\}$
E_2	$C =$ "registo de mais de 5 acidentes anuais na A1" $= \{5, 6, \ldots\}$
E_3	$D =$ "resistência superior a 8 unidades" $= (8, +\infty)$

•

Nota 2.10 — O evento A diz-se:

- elementar — quando constituído por um único elemento de Ω, i.e., $\#A = 1$;
- certo — se $A = \Omega$;
- impossível — caso $A = \emptyset$. •

Definição 2.11 — **Eventos disjuntos**
Os eventos A e B dizem-se disjuntos (ou mutuamente exclusivos, ou incompatíveis) sse

$$A \cap B = \emptyset, \tag{2.1}$$

i.e., se a realização simultânea de A e B for impossível. •

Definição 2.12 — **Inclusão de eventos**
Quando o evento A está contido (incluso) em B — $A \subset B$ — verifica-se:

$$\text{Realização de } A \;\Rightarrow\; \text{Realização de } B \tag{2.2}$$

$$\text{Realização de } A \;\not\Leftarrow\; \text{Realização de } B, \tag{2.3}$$

i.e., a realização de A implica a de B mas a implicação no sentido contrário não é necessariamente verdadeira. •

Uma vez que os eventos não passam de (sub)conjuntos é possível efectuar **operações sobre eventos** já nossas conhecidas como são o caso da intersecção, da reunião, etc. Descreveremos o seu significado em termos de realizações de eventos quer verbalmente, quer à custa de um diagrama de Venn.

Sejam

- Ω o espaço de resultados de uma E.A. e
- A e B dois eventos.

Então podemos efectuar as seguintes operações sobre A e B:

Operação	Notação	Descrição verbal	Diagrama de Venn
Intersecção	$A \cap B$	Realização simultânea de A e de B	
Reunião	$A \cup B$	Realização de A ou de B, i.e., de pelo menos um dos dois eventos	
Diferença	$B \backslash A$	Realização de B sem que se realize A (B excepto A)	
	$A \backslash B$	Realização de A sem que se realize B (A excepto B)	
Complementar	$\overline{A}$	Não realização de A	

As operações sobre eventos gozam de **propriedades** bem conhecidas como a associatividade, comutatividade, etc., que convém recordar:

Propriedade	Descrição matemática
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$
	$A \cup B = B \cup A$
Distributividade	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Idempotência	$A \cap A = A$
	$A \cup A = A$
Absorção	$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
	$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
Modulares	$A \cap \Omega = A$
	$A \cup \Omega = \Omega$
	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup \emptyset = A$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Dupla negação	$\overline{\overline{A}} = A$

2.2 Noção de probabilidade. Interpretações frequencista e subjectivista. Axiomas. (2-2)

A probabilidade é um conceito extraordinariamente complexo e, como teremos ocasião de ver daqui a pouco, somos capazes de adiantar algumas noções de probabilidade que se revelarão insatisfatórias devido a limitações a elas subjacentes.

Definição 2.13 — **Probabilidade clássica de Laplace**
Considere-se uma E.A. com espaço de resultados Ω com as seguintes particularidades: Ω é constituído por

- n eventos elementares ($\#\Omega = n$)
- distintos
- igualmente prováveis[1] e em
- número finito.

Considere-se ainda que a realização do evento A passa pela ocorrência de m dos n eventos elementares, i.e., $\#A = m$. Então a probabilidade de realização de A é dada por:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{número de casos favoráveis à ocorrência de A}}{\text{número de casos possíveis}} \\ &= \frac{\#A}{\#\Omega} \\ &= \frac{m}{n}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

•

Nota 2.14 — **Limitações**
Esta definição só é válida quando

- $\#\Omega < +\infty$ (ou seja, o número de eventos elementares é finito) e
- Ω é constituído por eventos elementares igualmente prováveis,

pressupostos estes frequentemente violados na prática. •

[1] Nada leva a crer que a ocorrência de algum dos eventos é privilegiada em relação aos restantes.

Exemplo 2.15 — Probabilidade clássica de Laplace
Admita que num stand se encontram 353 viaturas de somente duas marcas (A e B). Destas:

- 201 são da marca A;
- 57 possuem direcção assistida;
- 37 são da marca A e possuem direcção assistida.

Calcule a probabilidade de uma viatura seleccionada ao acaso ser da marca A.

- **Evento**

  $A =$ "viatura seleccionada ao acaso ser da marca A"

- **No. casos favoráveis**

  $m = 201$

- **No. casos possíveis**

  $n = 353$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n}{m} \\ &= \frac{201}{353}. \end{aligned}$$

•

Antes de passarmos a uma outra noção de probabilidade é conveniente adiantarmos a definição de frequência relativa de um evento bem como as propriedades algébricas dessa mesma frequência.

Definição 2.16 — Frequência relativa
Sejam:

- N o número de realizações (nas mesmas condições) de certa E.A.;
- $n_N(A)$ o número de vezes que o evento A ocorreu nas N realizações da E.A. (i.e., representa a frequência absoluta do evento A).

Então a frequência relativa do evento A é dada por

$$f_N(A) = \frac{n_N(A)}{N}. \tag{2.5}$$

•

Nota 2.17 — **Propriedades algébricas**
A frequência relativa satisfaz as seguintes propriedades:

- $0 \leq f_N(A) \leq 1$;
- $f_N(\Omega) = 1$;
- $f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B)$, se $A \cap B = \emptyset$;
- $f_N(A)$ estabiliza à medida que N aumenta. •

Não surpreende pois a seguinte noção de probabilidade.

Definição 2.18 — **Probabilidade Frequencista**
A probabilidade do evento A é igual ao limite da frequência relativa da ocorrência do evento A:

$$P(A) = \lim_{N \to +\infty} \frac{n_N(A)}{N} = \lim_{N \to +\infty} f_N(A). \tag{2.6}$$

•

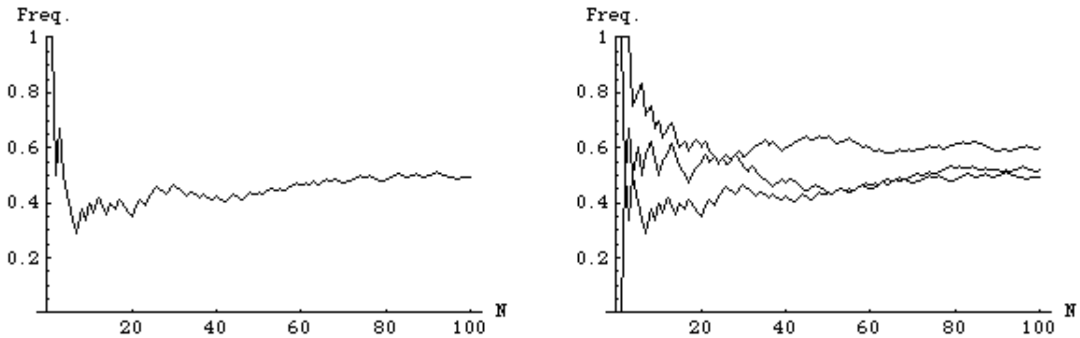
Exemplo 2.19 — **Probabilidade frequencista**
Foram registados os resultados respeitantes a um total de 100 lançamentos de uma moeda equilibrada. Assim, nas colunas da tabela abaixo podem encontrar-se

- o número do lançamento (N),
- o resultado do $N-$ésimo lançamento (0=coroa, 1=cara) e
- a frequência relativa do evento $A =$ "sair cara" até ao $N-$ésimo lançamento ($f_N(A)$),

respectivamente.

N	(0=coroa, 1=cara)	$f_N(A)$	$\cdots$	N	(0=coroa, 1=cara)	$f_N(A)$
1	1	$\frac{1}{1}$	$\cdots$	91	1	$\frac{46}{91}$
2	0	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	92	1	$\frac{47}{92}$
3	1	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	93	0	$\frac{47}{93}$
4	0	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	94	0	$\frac{1}{2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10	1	$\frac{2}{5}$	$\cdots$	100	0	$\frac{49}{100}$

A esta tabela segue-se o correspondente gráfico da frequência relativa $f_N(A)$ (à esquerda) e o deste e de outros dois conjuntos de 100 lançamentos (à direita). Em ambos é evidente a estabilização da frequência relativa em torno de 0.5 à medida que o número total de lançamentos (N) aumenta.



Nota 2.20 — **Limitações**
Esta noção de probabilidade não é razoável caso a E.A. não possa ser realizada mais do que uma vez ou quando ela é hipotética (por exemplo, uma ida a Marte). •

Definição 2.21 — **Probabilidade subjectiva**
Uma pessoa pode atribuir a um evento um número real no intervalo $[0,1]$ a que se dará o nome de *probabilidade do evento* e que expressa um grau de credibilidade pessoal na ocorrência do evento. •

Exemplo 2.22 — **Probabilidade subjectiva**
Ao perguntar-se qual a probabilidade de visitar-se o planeta Marte antes do ano 2030 obteve-se as seguintes respostas de duas pessoas:

- funcionário da NASA $\rightarrow 0.5$;
- taxista $\rightarrow 0$. •

Este exemplo leva a considerar uma outra noção de probabilidade que deverá ser precedida pela apresentação da noção de $\sigma-$álgebra de eventos.

Definição 2.23 — **$\sigma-$álgebra de eventos**
Trata-se de uma colecção não vazia de eventos (probabilizáveis), $\mathcal{A}$, que verifica as seguintes propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$;
3. $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$ para qualquer colecção contável de eventos de $\mathcal{A}$, seja ela $\{A_1, A_2, \ldots\}$. •

Exemplo 2.24 — $\sigma-$**álgebra de eventos**

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$;
- $\mathcal{A}_2 = \mathbb{P}(\Omega)$ que representa as "partes de Ω", i.e., a colecção de todos os subconjuntos de Ω. •

Definição 2.25 — **Função de probabilidade** (no sentido de Kolmogorov)
Função que possui por domínio a $\sigma-$álgebra de eventos e por contradomínio o intervalo $[0,1]$ — i.e.,

$$P : \mathcal{A} \to [0,1] \tag{2.7}$$

— e com a particularidade de respeitar os seguintes...

Axiomas

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$.
3. Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma colecção contável de eventos mutuamente exclusivos de $\mathcal{A}$ (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$). Então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i). \tag{2.8}$$

•

Proposição 2.26 — **Consequências elementares dos axiomas**
Os axiomas não nos ensinam a calcular probabilidades mas estabelecem regras para o seu cálculo — muito em particular algumas das suas seguintes consequências elementares:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
4. $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$. •

Exercício 2.27 — Demonstre as consequências elementares dos axiomas. •

Exemplo 2.28 — **Consequências elementares dos axiomas**

Uma companhia de telecomunicações classifica as chamadas como sendo do tipo:

- V, caso haja transmissão de voz;
- D, caso haja de dados (por modem ou fax).

Com base em informação da companhia pode adiantar-se que:

Evento	Probabilidade
V = "transmissão de voz"	$P(V) = 0.7$
D = "transmissão de dados"	$P(D) = 0.5$
$V \cap D$ = "transmissão simultânea de voz e dados"	$P(V \cap D) = 0.2$

(a) Calcule a probabilidade de a transmissão não ser de voz.

- **Evento**
  $\overline{V}$ = "transmissão não ser de voz"
- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(\overline{V}) &= 1 - P(V) \\ &= 1 - 0.7 \\ &= 0.3. \end{aligned}$$

(b) Obtenha a probabilidade de haver exclusivamente transmissão de voz.

- **Evento**
  $V \backslash D$ = "transmissão exclusiva de voz"
- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(V \backslash D) &= P(V) - P(V \cap D) \\ &= 0.7 - 0.2 \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

•

Nota 2.29 — Um evento pode ainda ser classificado de:

- quase-certo — se $P(A) = 1$ no entanto $A \neq \Omega$;
- quase-impossível — caso $P(A) = 0$ mas $A \neq \emptyset$. •

Exemplo 2.30 — Dê exemplos de eventos quase-certos e quase-impossíveis. •

2.3 Regras de adição. (2-3)

De seguida são enunciados dois resultados que permitirão o cálculo da probabilidade da reunião de dois e de três eventos.

Proposição 2.31 — **Reunião de dois eventos**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.9}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P\left[(A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)\right] \\ &= P(A \backslash B) + P(A \cap B) + P(B \backslash A) \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) + [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned} \tag{2.10}$$

•

Proposição 2.32 — **Reunião de três eventos**

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad +P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \tag{2.11}$$

•

Exercício 2.33 — Demonstre a regra de adição (2.11). •

Exemplo 2.34 — **Regras de adição**
Retome o Exemplo 2.15 respeitante ao stand com 353 viaturas.

(a) Organize uma tabela com os eventos já descritos e com as respectivas probabilidades.

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Casos favor.	Casos poss.	Probabilidade
$A =$ "viat. marca A"	201	353	$P(A) = \frac{201}{353}$
$D =$ "viat. com direcção assist."	57	353	$P(D) = \frac{57}{353}$
$A \cap D =$ "viat. marca A com direcção assist."	37	353	$P(A \cap D) = \frac{37}{353}$

(b) Obtenha a probabilidade de uma viatura seleccionado ao acaso ser da marca A ou possuir direcção assistida.

- **Evento**

  $A \cup D$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(A \cup D) &= P(A) + P(D) - P(A \cap D) \\ &= \frac{201}{353} + \frac{57}{353} - \frac{37}{353} \\ &= \frac{221}{353}. \end{aligned}$$

•

2.4 Probabilidade condicionada. (2-4)

Motivação 2.35 — Suponha que dispomos de um baralho de 52 cartas (13 de cada naipe) do qual extraímos uma carta ao acaso.

(a) Qual a probabilidade de ter saído o rei de copas? **1/52**

(b) Qual a probabilidade de ter saído o rei de copas sabendo à partida que a carta extraída é uma carta de paus? **0**

(c) E se soubéssemos de antemão que a carta é de copas? **1/13** •

Nota 2.36 — Como pudemos ver, a probabilidade do evento *sair o rei de copas* foi sucessivamente avaliada à medida que nos foi adiantada informação. •

A questão que se coloca naturalmente é: de que forma a obtenção de informação adicional (correspondente à ocorrência de eventos) pode vir a influenciar a cálculo de probabilidades?

Definição 2.37 — **Probabilidade condicionada**
Sejam:

- Ω o espaço de resultados;
- P a função de probabilidade.

Então a probabilidade do evento A condicionada pela ocorrência do evento B é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (2.12)$$

desde que $P(B) > 0$. •

Nota 2.38 — Esta probabilidade também pode ler-se do seguinte modo *probabilidade de A dado B* ou *probabilidade de A sabendo que B ocorreu* e representa uma reavaliação da probabilidade de A face ao facto de B ter ocorrido. •

Exemplo 2.39 (cont.) — Qual a probabilidade de a carta seleccionada ao acaso ser o rei de copas sabendo à partida que se trata de uma carta de copas?

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$A =$ Sair o rei de copas	$P(A) = \frac{1}{52}$
$B =$ Sair uma carta de copas	$P(B) = \frac{13}{52}$

- **Evento**

  $A|B$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\text{sair o rei de copas e sair carta de copas})}{P(\text{sair copas})} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{1/52}{13/52} \\ &= \frac{1}{13}. \qquad (2.13) \end{aligned}$$

•

Nota 2.40 — $P(\ldots|B)$ é uma função de probabilidade (no sentido de Kolmogorov) como tal respeita os três axiomas seguintes:

1. $P(\Omega|B) = 1$;
2. $0 \leq P(A|B) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$;

3. Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma colecção contável de eventos mutuamente exclusivos de $\mathcal{A}$ (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$). Então

$$P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right)\middle| B\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i|B). \tag{2.14}$$

Para além disso verifica as consequências elementares destes mesmos axiomas enunciadas na Proposição 2.26. •

Exemplo 2.41 — Um grupo de alunos do 1o. ano de Mecânica elaborou 100 programas. Constatou-se que

- 20% possuem Erros de Sintaxe (S),
- 30% possuem Erros de Input/Output (IO) e
- 10% possuem Erros de Sintaxe e Input/Output.

Admitamos que foi escolhido ao acaso um programa e que este possuía Erros de Sintaxe. Neste caso qual a probabilidade do programa possuir (também) Erros de Input/Output?

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
S = programa com erros de Sintaxe	$P(S) = 0.2$
IO = programa com erros de Input/Output	$P(IO) = 0.3$
$S \cap IO$ = programa com erros de Sintaxe e de Input/Output	$P(S \cap IO) = 0.1$

- **Evento**

  $IO|S$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(IO|S) &= \frac{P(S \cap IO)}{P(S)} \\ &= \frac{0.1}{0.2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.15}$$

•

2.5 Regras de multiplicação (leis das probabilidades compostas e da probabilidade total). (2-5)

Motivação 2.42 — Suponha que se conhece $P(A|B)$ e $P(B)$. Será que podemos calcular $P(A \cap B)$? A resposta é afirmativa:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{2.16}$$

A generalização deste resultado para a intersecção de n eventos constitui a lei das probabilidades compostas (uma de duas regras da multiplicação). •

Proposição 2.43 — **Lei das probabilidades compostas**
Considere-se uma colecção de n eventos $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ tal que $P(A_i) > 0$ e $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}) > 0$. Então

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) &= P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P[A_3|(A_1 \cap A_2)] \\ &\quad \dots \times P[A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1})]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

•

Exercício 2.44 — Demonstre a lei das prob. compostas enunciada na Prop. 2.43. •

Com o exemplo que se segue, veremos que a lei das probabilidades compostas é de extrema utilidade especialmente quando pretendemos calcular a probabilidade de sequências de eventos em experiências aleatórias.

Exemplo 2.45 — **Lei das probabilidades compostas**
Considere-se um lote de 100 molas do sistema de suspensão de automóvel. Destas, 20 são consideradas defeituosas (D) por violarem a lei de Hooke quando se aplica uma força superior a $35 \times 10^4 N$.
Responda às questões seguintes sabendo que foram recolhidas 3 molas ao acaso e sem reposição deste lote.

(a) Qual a probabilidade das 3 molas não serem defeituosas?

- **Evento**
  $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3 =$ "1a., 2a. e 3a. molas não defeituosas"
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \overline{D}_3) &\overset{lei\ prob.\,comp.}{=} P(\overline{D}_1) \times P(\overline{D}_2|\overline{D}_1) \times P[\overline{D}_3|(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)] \\ &= \frac{80}{100} \times \frac{80-1}{100-1} \times \frac{80-1-1}{100-1-1} \\ &= \frac{80}{100} \times \frac{79}{99} \times \frac{78}{98}. \end{aligned}$$

(b) Qual a probabilidade de, nessa mesma recolha, obtermos uma mola defeituosa somente à 3a. extracção?

- **Evento**

  $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap D_3 =$ "1a., 2a. molas não defeituosas e 3a. mola defeituosa"

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap D_3) & \stackrel{lei\ prob.\ comp.}{=} P(\overline{D}_1) \times P(\overline{D}_2|\overline{D}_1) \times P[D_3|(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2)] \\ &= \frac{80}{100} \times \frac{80-1}{100-1} \times \frac{20}{100-1-1} \\ &= \frac{80}{100} \times \frac{79}{99} \times \frac{20}{98}. \end{aligned}$$

•

A noção de partição do espaço de resultados enunciada já a seguir é necessária para enunciar não só a lei da probabilidade total nesta secção como o Teorema de Bayes enunciado ainda neste capítulo.

Definição 2.46 — Partição de Ω

A colecção de n eventos $\mathcal{P}_\Omega = \{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ diz-se uma partição de Ω sse:

- $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ (eventos disjuntos dois a dois);
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$;
- $P(A_i) > 0, i = 1, \ldots, n.$[2] •

Exemplo 2.47 — Partição

- E.A. — Registo do número de acidentes na A1 durante um ano
- $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathcal{P}_\Omega = \{\{i\}\}_{i=0,1,2,\ldots}$, partição constituída por todos os eventos elementares de Ω
- $\mathcal{P}'_\Omega = \{\{0, 2, 4, 6, \ldots\}, \{1, 3, 5, \ldots\}\}$, partição constituída pelos eventos "registo de número par" e "registo de número ímpar". •

[2] As partições com que lidaremos são de um modo geral constituídas por um número finito de eventos. Estes também podem ser em número infinito numerável. No âmbito desta disciplina não se considerarão partições com um número infinito não numerável de eventos, daí a notação.

Proposição 2.48 — **Lei da probabilidade total**
Sejam:

- B um evento;
- $\mathcal{P}_\Omega = \{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ uma partição de Ω.

Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \tag{2.18}$$

•

Nota 2.49 — Este resultado reveste-se de grande importância por permitir calcular a probabilidade de um evento B quando se dispõe das probabilidades de B condicionadas a eventos A_i (que constituem uma partição de Ω) e das probabilidades destes eventos condicionais. •

Exercício 2.50 — Prove a lei da probabilidade total enunciada anteriormente na Proposição 2.48. •

Exemplo 2.51 — **Lei da probabilidade total** [3]
Com o objectivo de aumentar a segurança de crianças em automóveis, estão a ser testados dois dispositivos de retenção A e B. As simulações mostraram que, em caso de acidente grave, o dispositivo A (resp. B) é eficaz em 95% (resp. 96%) dos casos. Admita que no mercado só passarão a existir estes dois dispositivos, instalados em automóveis exactamente na mesma proporção. Qual a probabilidade do dispositivo de retenção instalado num automóvel seleccionado ao acaso vir a ser eficaz em caso de acidente grave?

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
A = dispositivo do tipo A	$P(A) = 0.5$
B = dispositivo do tipo B	$P(B) = 0.5$
E = dispositivo eficaz em caso de acidente grave	$P(E) = ?$
$E\|A$ = dispositivo eficaz... dado que é do tipo A	$P(E\|A) = 0.95$
$E\|B$ = dispositivo eficaz... dado que é do tipo B	$P(E\|B) = 0.96$

[3] Adaptado do Exame de 1a. Época, 24 de Junho de 2006.

- **Evento**

  $E =$ dispositivo eficaz em caso de acidente grave

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(E) & \stackrel{lei\ prob.total}{=} & P(E|A) \times P(A) + P(E|B) \times P(B) \\ & = & 0.95 \times 0.5 + 0.96 \times 0.5 \\ & = & 0.955. \end{aligned}$$

(Por que razão $P(E)$ é igual à média de $P(E|A)$ e $P(E|B)$?) •

2.6 Acontecimentos independentes. (2-6)

Definição 2.52 — **Eventos independentes**
Os eventos A e B dizem-se independentes sse

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \tag{2.19}$$

Neste caso é usual escrever-se $A \perp\!\!\!\perp B$. •

Exemplo 2.53 — **Lei da probabilidade total; eventos independentes** [4]
75% da população de Nicosia (Chipre) é grega e 25% turca. Apurou-se também que 20% dos gregos e 10% dos turcos falam inglês.

(a) Qual a percentagem da população de Nicosia que fala inglês?

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
$G =$ habitante grego	$P(G) = 0.75$
$T =$ habitante turco	$P(T) = 0.25$
$I =$ habitante falar inglês	$P(I) = ?$
$I\|G =$ habitante falar inglês dado que é grego	$P(I\|G) = 0.20$
$I\|T =$ habitante falar inglês dado que é turco	$P(I\|T) = 0.10$

- **Evento**

  $I =$ habitante falar inglês

[4] Adaptado do Teste A, 22 de Abril de 2006.

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(I) &\stackrel{lei\ prob. total}{=} P(I|G) \times P(G) + P(I|T) \times P(T) \\ &= 0.20 \times 0.75 + 0.10 \times 0.25 \\ &= 0.175. \end{aligned}$$

(b) Serão os eventos “ser grego” e “falar inglês” eventos independentes?

- **Averiguação de independência**

$$\begin{aligned} P(G \cap I) &= P(I|G) \times P(G) \\ &= 0.20 \times 0.75 \\ &= 0.15 \\ &\neq \\ P(G) \times P(I) &= 0.75 \times 0.175 \\ &= 0.13125. \end{aligned}$$

- **Conclusão**

  Já que $P(G \cap I) \neq P(G) \times P(I)$ pode afirmar-se que G e I não são eventos independentes como, aliás, seria de esperar. •

Proposição 2.54 — **Consequências**

1. Sejam A e B eventos independentes tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Então:
   - $P(A|B) = P(A)$;
   - $P(B|A) = P(B)$.

   Isto é, o conhecimento de B não afecta a reavaliação da probabilidade de A, e vice-versa.

2. Sejam A e B dois eventos tais que:
   - $A \cap B = \emptyset$ (eventos disjuntos);
   - $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

   Então $A \not\perp\!\!\!\perp B$, i.e., A e B não são independentes.

3. Tem-se, para qualquer evento A:
   - $A \perp\!\!\!\perp \emptyset$;
   - $A \perp\!\!\!\perp \Omega$.

4. Sejam A e B dois eventos independentes. Então:
   - $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$;
   - $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$;
   - $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. •

Exercício 2.55 — Demonstre a Proposição 2.54. •

Nota 2.56 — **Independência completa** (três eventos)
Os eventos A, B e C dizem-se completamente independentes sse

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$;
- $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$;
- $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$;
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$. •

Nota 2.57 — **Independência completa** (n eventos)
Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ dizem-se completamente independentes sse o forem dois a dois, três a três, ..., n a n. •

2.7 Teorema de Bayes. (2-7)

Motivação 2.58 — Uma vez conhecida a probabilidade $P(B|A)$ poderá avaliar-se $P(A|B)$? A resposta a esta questão é afirmativa —

$$P(A|B) = P(B|A) \times \frac{P(A)}{P(B)} \tag{2.20}$$

— e é enunciada no teorema que se segue. •

Teorema 2.59 — **Teorema de Bayes**
Sejam:

- B um evento tal que $P(B) > 0$;
- $\mathcal{P}_\Omega = \{A_1, \ldots A_n\}$ uma partição de Ω.

Então

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}. \tag{2.21}$$

Recorrendo à lei da probabilidade total pode adiantar-se que

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}. \tag{2.22}$$

•

Nota 2.60 — Este resultado permite que a reavaliação das probabilidades se faça tanto num sentido como noutro:

- A_i sabendo B e
- B sabendo A_i. •

Exemplo 2.61 — Teorema de Bayes [5]
Retome o Exemplo 2.51 e calcule agora a probabilidade de o dispositivo ser do tipo A sabendo que foi eficaz em caso de acidente grave.

- **Evento**

  $A|E =$ dispositivo do tipo A dado que foi eficaz em caso de acidente grave

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(A|E) &\overset{teorema\ Bayes}{=} \frac{P(E|A) \times P(A)}{P(E)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.5}{0.955} \\ &= 0.4974. \end{aligned}$$

•

Exemplo 2.62 — Lei da probabilidade total e teorema de Bayes [6]
Quatro instrumentos de corte, um de cada uma das marcas M_1, M_2, M_3 e M_4, funcionam satisfatoriamente com probabilidade 0.9, 0.8, 0.6, 0.4, respectivamente para cada marca.

(a) Determine a probabilidade de um instrumento, seleccionado ao acaso desses quatro, funcionar satisfatoriamente.

- **Evento**

  $S =$ instrum. seleccionado funcionar satisfatoriamente

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(S) &\overset{lei\ prob.total}{=} \sum_{i=1}^{4} P(S|M_i) \times P(M_i) \\ &= (0.9 + 0.8 + 0.6 + 0.4) \times 0.25 \\ &= 0.675. \end{aligned}$$

(Consulte o quadro de eventos e probabilidades que se segue.)

[5] Adaptado do Exame de 1a. Época, 24 de Junho de 2006.
[6] Exame de Época Especial, 8 de Setembro de 2004.

- **Quadro de eventos e probabilidades**

Evento	Probabilidade
M_i = instrum. ser da marca i	$P(M_i) = 0.25, i = 1,2,3,4$
S = instrum. func. satisf.	$P(S) = ?$
$S\|M_i$ = instrum. func. satisf. dado que é da marca i	$P(S\|M_i) = \begin{cases} 0.9, i=1 \\ 0.8, i=2 \\ 0.6, i=3 \\ 0.4, i=4 \end{cases}$

(b) Sabendo que o instrumento seleccionado ao acaso não funciona satisfatoriamente, qual a probabilidade de se ter selecionado um dos dois instrumentos menos fiáveis?

- **Evento**

  $(M_3 \cup M_4)|\overline{S}$ =instrum. seleccionado ser da duas marcas menos fiáveis dado que não funcionou satisfatoriamente

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P[(M_3 \cup M_4)|\overline{S}] &= P(M_3|\overline{S}) + P(M_4|\overline{S}) \\
&\overset{teorema\ Bayes}{=} \frac{P(\overline{S}|M_3) \times P(M_3)}{P(\overline{S})} + \frac{P(\overline{S}|M_4) \times P(M_4)}{P(\overline{S})} \\
&= \frac{[1 - P(S|M_3)] \times P(M_3)}{1 - P(S)} \\
&\quad + \frac{[1 - P(S|M_4)] \times P(M_4)}{1 - P(S)} \\
&= \frac{(1-0.6) \times 0.25}{1 - 0.675} + \frac{(1-0.4) \times 0.25}{1 - 0.675} \\
&= 0.769.
\end{aligned}
$$

•

Texto de apoio: Pestana, D.D. e Velosa, S.F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.