



1 Exercícios da 1ª Semana — 7 de setembro

1. Determine se os pontos $P(3, -1, 5)$ e $Q(-1, 3, 4)$ pertencem à superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (u + v, u^2 - v, u + v^2).$$

2. Determine uma representação paramétrica das superfícies descritas por:

- (a) o plano que passa pelos pontos $(1, 2, -3)$, $(2, 3, -4)$ e $(2, 1, -2)$.
- (b) A porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$.
- (c) A porção no primeiro octante do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$.
- (d) A parte do plano $z = x + 3$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3. Identifique e faça um esboço da imagem da superfície parametrizada por

- (a) $g(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v)$ com $u^2 + v^2 < 1$
- (b) $g(u, v) = (2 \sin u, 3 \cos u, v)$, $0 < v < 2$
- (c) $g(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \frac{1}{v^2})$ com $0 \leq u < 2\pi$ e $v > 0$.
- (d) $g(u, v) = (u + v, 3 - v, 1 + 4u + 5v)$, para $u, v \in \mathbb{R}$.

4. Mostre que as equações paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \sin v$, $z = c \sinh u$, representam um hiperboloide com uma folha.

5. Determine a expressão geral do vector normal unitário à superfície S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, orientada para fora.

6. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $g(u, v)$ no ponto especificado.

- (a) $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$ em $u = 1$, $v = 1$.
- (b) $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$ no ponto $(2, 3, 0)$.
- (c) $g(u, v) = (\arctan(uv), e^{u^2 - v^2}, u - v)$ no ponto $g(1, -1)$.

7. Considere o paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

- (a) Determine uma representação paramétrica $g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície.
- (b) Calcule a equação do plano tangente à superfície no ponto $(-a\pi, 0, \pi^2)$.

Soluções

1. P pertence à superfície e Q não pertence à superfície.
2. (a) $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u - v$, $z = -3 - u + v$ com $u, v \in \mathbb{R}$
(b) $x = u$, $y = 4 \cos \theta$, $z = 4 \sin \theta$ com $0 \leq u \leq 5$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
(c) $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $z = r$, com $0 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
(d) $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $z = 3 + r \cos(\theta)$, onde $0 \leq r < 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
3. (a) Semi superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y \geq 0$.
(b) Parte do cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em $0 \leq z \leq 2$
(c) Gráfico de $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$
(d) O plano $4x - y - z = -4$.
4. Note que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
5. Sendo a superfície dada por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, então (por exemplo)

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{1}{2} \nabla F = (x, y, z)$$

e

$$\nu(x, y, z) = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) = \frac{1}{3} (x, y, z)$$

para cada (x, y, z) satisfazendo $F(x, y, z) = 0$.

6. (a) $x + y - 2z = 0$
(b) $3x - y + 3z = 3$
(c) $(x, y, z) = (-\frac{\pi}{4}, 1, 2) + s(-\frac{1}{2}, 2, 1) + t(\frac{1}{2}, 2, -1)$, $s, t \in \mathbb{R}$.
7. (a) $x = u$, $y = v$, $z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$, com $u, v \in \mathbb{R}$.
(b) $\frac{2\pi}{a}x + z = -\pi^2$

2 Exercícios da 2ª Semana — 14 de setembro

1. Calcule a área da superfície dada por:

(a) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

(b) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ e $u^2 + v^2 \leq 1$.

(c) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra no interior do cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

(d) $g(u, v) = (\cos u, v, \sin u)$ e $u^2 + 4v^2 \leq 1$.

(e) Porção da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 4$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e acima do plano xoy .

2. Considere a superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (uv, u + v, u - v)$$

(a) Determine o valor de c de forma que o ponto $(c, 1, 0)$ pertença à superfície

(b) Admitindo que se restringe o domínio de g ao disco $u^2 + v^2 \leq 1$, calcule a área da parte da superfície correspondente.

3. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4 - x^2 - z^2, y \geq -5\}$. Sendo a densidade em cada ponto de S dada por $\sigma(x, y, z) = 1/\sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}$, calcule a massa e as coordenadas do centro de massa de S .

4. Seja f um campo escalar e F um campo vectorial, ambos de classe C^2 . Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vectorial ou escalar.

(a) $\text{rot}(\nabla f)$

(b) $\nabla(\text{div } F)$

(c) $\text{div}(\text{div } F)$

(d) $\text{div}(\text{rot}(\nabla f))$

5. Determine o rotacional e a divergência dos seguintes campos vectoriais

(a) $F(x, y, z) = (\log x, \log(xy), \log(xyz))$

(b) $F(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z)$

(c) $F(x, y, z) = \left(0, e^{xy} \sin z, y \arctan \frac{x}{z}\right)$

6. Verifique as seguintes identidades sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = \|\mathbf{r}\|$.

(a) $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

(b) $\nabla(\ln r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$

(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

(d) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

7. Calcule a massa e o centro de massa da superfície de um cone cujo raio da base é R e cuja altura é h . Admita que a densidade de massa é igual à distância do ponto ao eixo de simetria do cone.
8. Verifique se os seguintes campos vectoriais são irrotacionais e/ou incompressíveis:

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xy) \quad , \quad G(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

Soluções

1. (a) $A(S) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
(b) $A(S) = \pi\sqrt{3}$
(c) $A(S) = \pi(2 - \sqrt{2})$
(d) $A(S) = \frac{\pi}{2}$
(e) $A(S) = 16$
2. (a) $c = \frac{1}{4}$
(b) $A(S) = \left(\sqrt{6} - \frac{4}{3}\right)2\pi$
3. $M = 9\pi$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, -\frac{1}{2}, 0)$.
4. (a) é um campo vectorial. (b) é um campo vectorial. (c) não tem significado pois $\text{div } F$ é um campo escalar. (d) é um campo escalar.
5. (a) $\text{rot } F = \left(\frac{1}{y}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ e $\text{div } F = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$
(b) $\text{rot } F = 0$ e $\text{div } F = 1$
(c) $\text{rot } F = \left(\arctan \frac{x}{z} - e^{xy} \cos z, -\frac{yz}{x^2+z^2}, ye^{xy} \sin z\right)$ e $\text{div } F = xe^{xy} \sin z - \frac{xy}{x^2+z^2}$
- 6.
7. $M = \frac{2}{3}\pi R^2 \sqrt{R^2 + h^2}$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{3}{4}h)$ (considerando um sistema de coordenadas em que o cone tem o vértice na origem e eixo Oz).
8. F é irrotacional e incompressível; G é irrotacional e não é incompressível.

3 Exercícios da 3ª Semana — 21 de setembro

1. Calcule o fluxo do campo vectorial F através da superfície S orientada da forma indicada, sendo:

- (a) Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (0, xz, 3xyz^2)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 + y^3, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

orientada com a normal unitária cuja terceira componente é positiva.

- (b) $F(x, y, z) = (yz, xz, 2xy)$ e S o cone definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 < z < 1$$

orientado com a normal n com terceira componente positiva.

- (c) $F(x, y, z) = h(r)(x, y, z)$, em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, e S a superfície esférica de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

2. Calcule o fluxo do campo vectorial F através da fronteira da região E segundo a normal exterior utilizando a definição de fluxo e o teorema da divergência, sendo:

- (a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

- (b) $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ e E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

3. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot \nu \, dS$ onde

- (a) $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z^2)$, S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$ e ν é a normal unitária que aponta para fora o cilindro.

- (b) $F(x, y, z) = (y^3 e^z, -xy, x \arctan y)$ e S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

- (c) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S , onde $F(x, y, z) = (x^3 y, -x^2 y^2, -x^2 yz)$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$.

- (d) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S , onde $F(x, y, z) = (3x, xz, z^2)$ e S é a superfície da região delimitada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano- xy .

- (e) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S , onde $F(x, y, z) = (x^4, -x^3z^2, 4xy^2z)$ e S é a superfície do sólido constituído pela parte do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ limitada pelos planos $z = x + 2$ e $z = 0$.

4. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$ onde

$$F(x, y, z) = \left(z^2x, \frac{1}{3}y^3 + \tan z, x^2z + y^2 \right),$$

S é o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e n é a normal unitária a S orientada para cima.

Nota: S não é uma superfície fechada.

5. Seja $F = (z \arctan y^2, z^3 \ln(x^2 + 1), z)$. Determine o fluxo de F através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para cima.

Nota: S não é uma superfície fechada.

6. Calcule o volume do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$$

usando o teorema da divergência.

7. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e $\mathbf{v}$ o campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Mostre que

$$\text{Volume } E = \frac{1}{3} \iint_S F \cdot \mathbf{v} \, dS$$

sendo $\mathbf{v}$ a normal unitária exterior a S .

8. Demonstre a identidade abaixo, supondo que S e E satisfaçam as condições do teorema da divergência e que as funções escalares e as componentes dos campos vectoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

$$\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV$$

Sugestão: Use o teorema da divergência e o facto de $\nabla f \cdot \nabla g = \nabla g \cdot \nabla f$.

9. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e f uma função escalar de classe C^2 , mostre que

$$\iint_S D_{\mathbf{N}} f \, dS = \iiint_E \Delta f \, dV$$

onde $D_{\mathbf{N}} f$ é a derivada de f na direcção da normal a S , $\mathbf{N}$ e $\Delta f = \nabla^2 f$ é a laplaciano de f .

Soluções

1. (a) 0
(b) 0
(c) $4\pi h(1)$
2. (a) 4π (b) $\pi/2$
3. (a) 36π (b) $-\frac{1}{24}$ (c) 0 (d) $\frac{136}{3}\pi$ (e) $\frac{2\pi}{3}$
4. $\frac{13}{20}\pi$
5. $3\pi/2$
6. $\pi/2$

4 Exercícios da 4ª Semana — 28 de setembro

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y, z, x)$$

e a superfície S igual ao hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva. Calcule o fluxo do $\text{rot } F$ através de S utilizando

- (a) A definição de fluxo.
- (b) O teorema de Stokes.

2. Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS$ sendo

- (a) S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, xyz).$$

- (b) S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, em que se considera a normal ν com primeira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, (x^2 y^2 + 1)z, -y).$$

- (c) S a superfície parametrizada por $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, $u > 0$, $v > 0$, $u + v < 1$, sendo ν a normal com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, -x^2, z).$$

3. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, em que:

- (a) C é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e

$$F(x, y, z) = (y + z, -z, y)$$

- (b) C é a curva de intersecção do plano $x + z = 5$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, percorrida no sentido directo quando vista de cima e

$$F(x, y, z) = (xy, 2z, 3y)$$

- (c) C é o triângulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, orientado no sentido

anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante, e

$$F(x, y, z) = (x - z, y - x, z - xy).$$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial F ao longo da curva C , sendo:

(a) C o bordo da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, 0 < x < 1\},$$

orientada com uma normal à sua escolha, e

$$F(x, y, z) = (z, -xy, -xz).$$

(b) C é a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos(2t)) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

e F o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3).$$

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 ; 1 < y < 4\},$$

orientada com a normal ν cuja segunda componente é positiva.

(a) Sabendo que S tem densidade superficial de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$ calcule a massa total de S .

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x, -y, -z)$$

através de S no sentido da normal ν .

6. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

(a) $F(x, y, z) = (yz, -xz, xy - 2)$

(b) $F(x, y, z) = (y \sin z, y \cos z, \cos z)$

7. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_y < 0$.

- (a) Calcule a área de S .
- (b) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de $\mathbf{n}$, utilizando o teorema da divergência.
- (c) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de $\mathbf{n}$, utilizando o teorema de Stokes.

8. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 ; x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

- (a) Parametrize a superfície S .
- (b) Calcule a área de S .
- (c) Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ e calcule o trabalho

$$W = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

no sentido horário quando visto do ponto $(10, 10, 10)$, usando o teorema de Stokes.

- (d) Determine o fluxo de $G(x, y, z) = (x, -y^4 - y, 4y^3z + 2)$ através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o teorema da divergência.

9. Sejam $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e V um domínio nas condições do Teorema de Gauss. Mostre que o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r^3} \mathbf{r}$$

através da superfície ∂V é igual a zero quando a origem está no exterior de V . Qual será o valor desse fluxo quando V contiver a origem no seu interior?

Soluções

1. $-\pi$
2. (a) 0
(b) -2π
(c) $-\frac{5}{6}$
3. (a) -2π
(b) 9π
(c) $\frac{3}{2}$
4. (a) 0
(b) 0
5. (a) 33π
(b) -15π
6. (a) $\left(2y - \frac{x}{2}(y^2 + z^2), 0, \frac{y^2 z}{2}\right)$ (por exemplo)
(b) $(0, (x + y) \cos z, -xy \sin z)$ (por exemplo)
7. (a) $\frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2})$
(b) -63π
(c) -63π
8. (a) $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, definida em $U = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1 \wedge u > 0 \wedge v > 0\}$
(b) $\frac{\pi}{24} (5\sqrt{5} - 1)$
(c) $-\frac{\pi}{2}$
(d) $\frac{\pi}{2}$
9. 4π

5 Exercícios da 5ª Semana — 5 de outubro

1. Diga qual das seguintes equações é uma equação linear

$$(a) x - y' = xy \quad (b) y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

$$(a) \frac{dy}{dt} = -ye^t \quad (b) y' = x^3 - 2xy \quad (c) \frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$$

$$(d) t \frac{dy}{dt} + 2y = e^t, \quad t > 0 \quad (e) \frac{dy}{dx} - 3y = e^{3x} \sin x \quad (f) \frac{dy}{dt} = y \left(\frac{1}{t} - \tan t \right) + t \cos t$$

3. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

$$(a) (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (b) \frac{dy}{dt} + y = \sin t, \quad y(\pi) = 1$$

$$(c) \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0 \quad (d) \frac{dy}{dt} = y \left(\frac{1}{t} - \tan t \right) + t \cos t, \quad y(\pi) = 0$$

$$(e) \begin{cases} x' + h(t)x - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases} \quad \text{tomando-se} \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

4. No instante $t = 0$ a quantidade de um certo material radioativo armazenado é x_0 . A equação para $x(t)$, a quantidade de material radioativo é $\frac{dx}{dt} = -ax$, onde $a > 0$ é uma constante.

- (a) Encontre a solução $x(t)$
- (b) Calcule a *meia-vida*, ou seja o tempo necessário para que a concentração inicial x_0 se reduza a metade. Note que a “meia-vida” não depende da concentração inicial.

5. Considere a equação diferencial

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

- (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.
- (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.
- (c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções contínuas e n é número real diferente de 0 e de 1. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, envolvendo equações de Bernoulli:

$$(a) y' + \frac{y}{x} = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 1$$

(b) $y' = 5y - \frac{4x}{y}, \quad y(0) = -\frac{1}{5}$

7. Considere a equação de Riccati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \quad (1)$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Riccati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (1).

8. (a) Mostre que a substituição $z = 1/P$ transforma a equação logística

$$P' = kP \left(1 - \frac{P}{M} \right)$$

na equação linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

(b) Resolva a equação diferencial para obter uma expressão para $P(t)$,

9. Considere a equação diferencial separável $xe^y \sin x - yy' = 0$. Determine a solução (na forma implícita) deste equação que satisfaz a condição inicial $y(\frac{\pi}{2}) = -1$.

10. Resolva a equação diferencial

$$y' = (8x + 2y + 1)^2$$

efectuando a mudança de variável $v = 8x + 2y + 1$.

Soluções

1. (a) sim; (b) não

2. (a) $y(t) = ce^{-e^t}$ (b) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$ (c) $y(x) = 2x + ce^{-x}$
 (d) $y(t) = \frac{e^t(t-1)+c}{t^2}$ (e) $y(x) = e^{3x}(c - \cos x)$ (f) $y(t) = (t^2 + ct) \cos t$

com $c \in \mathbb{R}$, em todas as alíneas.

3. (a) $y(x) = 1$ (b) $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{\pi-t})$ (c) $y(t) = \frac{\sin t}{t^2}$

(d) $y(t) = (t^2 - \pi t) \cos t$

(e) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$

4. (a) $x(t) = x_0 e^{-at}$ (b) $T = \frac{\log 2}{a}$.

5. (a) $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ ou $y(t) = -\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ (b) $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}} e^{I_{\text{Max}}} = \left] 0, \infty \right[$

6. (a) $y(x) = \left(\frac{x^2}{5} + \frac{4}{5\sqrt{x}} \right)^2$ (b) $y(x) = -\frac{\sqrt{20x+2}-e^{10x}}{5}$

7. (a) $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2$ é equivalente à equação $\frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{2}{t} + 1 \right) \psi = -\psi^2$

(b) $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}}{t^2 \left(\int \frac{e^{-t}}{t^2} dt + C \right)}$

8. (b) $P(t) = \frac{MP_0 e^{kt}}{M + P_0(e^{kt} - 1)}$

9. $(1+y)e^{-y} = x \cos x - \sin x + 1$

10. $8x + 2y + 1 = 2 \operatorname{tg}(4x + c)$, com $c \in \mathbb{R}$

6 Exercícios da 6ª Semana — 12 de outubro

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$(a) \ y' = \frac{ty}{1+t^2} \quad (b) \ y' = (2-y)(y-1) \quad (c) \ y' = y(1-y^2) \quad (d) \ y' = \frac{y+t}{y-t}$$

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

3. Majorando e minorando as seguintes equações, obtenha estimativas para os intervalos máximos de definição dos problemas de valor inicial indicados.

$$(a) \ \frac{dy}{dt} = \arctan(ty), \ y(0) = 2 \quad (b) \ \frac{dy}{dt} = \frac{e^{\cos(ty)}}{y^3}, \ y(0) = 1$$

$$(c) \ \frac{dy}{dt} = y^2 e^y, \ y(0) = 1$$

Nota: Em (c), a função constante igual a 0 é uma solução da equação.

4. Determine o limite quando $t \rightarrow \infty$ da solução do problema de valor inicial

$$(e^y + \sin^4 y)y' = y - y^4, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2, \end{cases}$$

- (a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema numa vizinhança suficientemente pequena de $\frac{1}{2}$ onde esteja definida.
(b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.
(c) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

6. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- (a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de $0,] - \alpha, \alpha [$.
- (b) Mostre que o intervalo máximo de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- (c) Escreva uma equação integral que é equivalente ao P.V.I. para $y \in C^1([-\alpha, \alpha])$.

7. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y)$$

- (a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial $y(t_0) = y_0$ é única.
- (b) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y(0) = 0$ satisfaz $-t \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 0$.
- (c) Mais geralmente, mostre que

$$|y(t) - y_0| \leq |t - t_0| \quad \forall t$$

- (d) Conclua que o intervalo máximo de definição de qualquer das soluções desta equação é $\mathbb{R}$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(t, 0) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq \frac{1}{2}|y - x|, \quad \text{para todos os } (t, x), (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere o problema de valor inicial $y' = -y + f(t, y)$, com $y(0) = 1$.

- (a) Mostre que este problema tem solução única numa vizinhança de $t = 0$.
- (b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é $\mathbb{R}$.
- (c) Indique o valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
9. (a) Se $x(t)$ é a solução de uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, determine uma equação satisfeita pela função $y(t) = x(-t)$.
- (b) Mostre que todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \sin(tx) + t^3$$

são funções pares (quando prolongadas ao seu intervalo máximo de definição).

10. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2), \quad y(1) = 0 \tag{2}$$

- (i) Determine a solução de (2) e indique o seu intervalo máximo de solução.
- (ii) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2)e^y, \quad y(1) = 0$$

- (a) Sem tentar resolver a equação, justifique que o problema tem localmente uma e uma só solução.
- (b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é limitado superiormente, isto é, existe $\beta > 1$ tal que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} y(t) = \pm\infty$.

Sugestão: Comece por mostrar que a solução é uma função crescente para $t > 1$, e relacione com o problema (2).

Soluções

1. (a) $y' = \frac{ty}{1+t^2}$

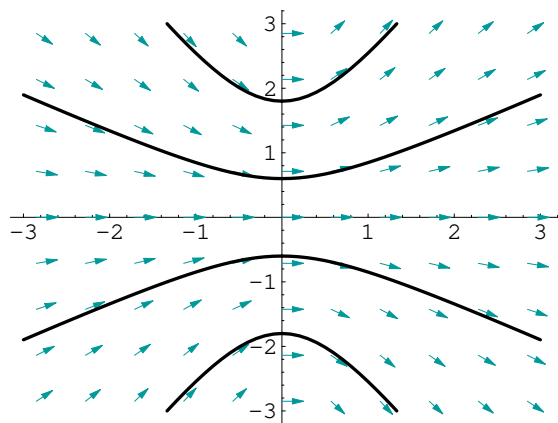


Figure 1: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \frac{ty}{1+t^2}$

(b) $y' = (2-y)(y-1)$

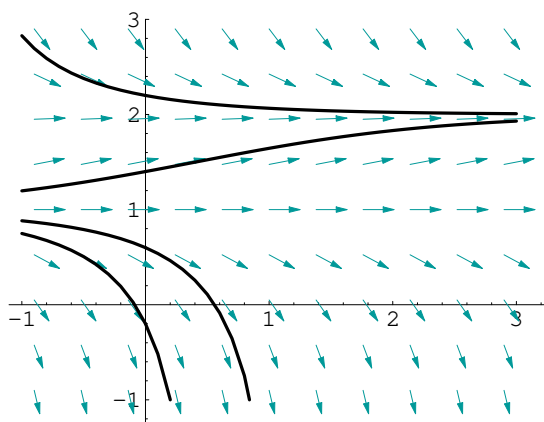


Figure 2: Campo de direções e algumas soluções de $y' = (2-y)(y-1)$

(c) $y' = y(1 - y^2)$

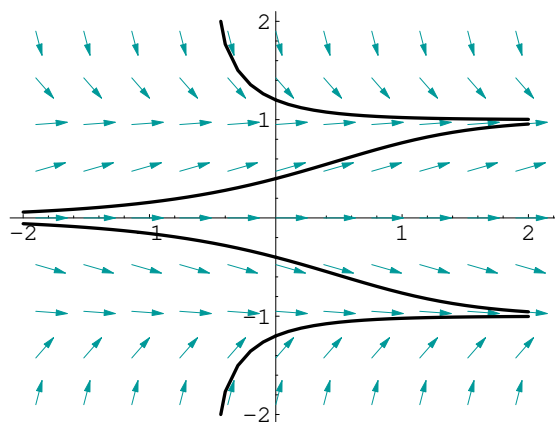


Figure 3: Campo de direções e algumas soluções de $y' = y(1 - y^2)$

(d) $y' = \frac{y + t}{y - t}$

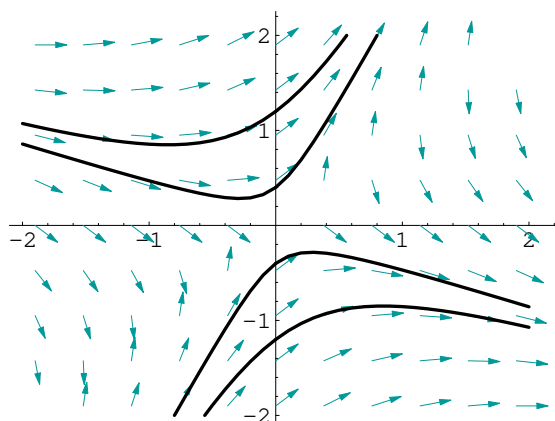


Figure 4: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \frac{y + t}{y - t}$

2. Com a solução de equilíbrio $y(x) \equiv 0$ e a solução geral $y_c(x) = \frac{(x + c)^2}{4}$, $c \in \mathbb{R}$, podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI):

- para $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

$$y_\alpha^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \alpha \\ \frac{(x - \alpha)^2}{4} & \text{se } x > \alpha \end{cases}$$

- para $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$

$$y_\alpha^-(x) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se } x < \alpha \\ 0 & \text{se } x \geq \alpha \end{cases}$$

3. (a) $I_{\text{Max}} = \mathbb{R}$ (b) $I_{\text{Max}} =]\alpha, +\infty[$ em que $\alpha \in [-e/4, -e^{-1}/4]$

(c) $I_{\text{Max}} =]-\infty, \alpha[$ em que $\alpha \in]0, e^{-1}]$

4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$

5. (a) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$

(b) Com a solução do (PVI) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$ e a solução geral $y(t) = \sqrt{1 - c(1-t)^2}$, $c \in \mathbb{R}$ podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI) definidas em $\mathbb{R}$ por

$$y_c(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + 12(1-t)^2} & \text{se } t \leq 1 \\ \sqrt{1 - c(1-t)^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$$

6. (b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$

7. (c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

8. (a) $\frac{dy}{dt} = -f(-t, y(t))$

9. (i) $y(t) = \tan \frac{t^2 - 1}{2}$, e $I_{\text{Max}} =]-\sqrt{\pi + 1}, \sqrt{\pi + 1}[$.

7 Exercícios da 9ª Semana — 2 de novembro

Resolva cada de seguintes equações.

1. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At} :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad A = 0 & \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix} & \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(d)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{(e)} \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} & \text{(f)} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogênea associada.
(b) Resolva o problema.
4. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -z(0) = -1$.

Sugestão: note que as primeiras duas equações não mencionam z .

5. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp \left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{At} e^{(B-A)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.

6. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$ (b) $y''' - y' = 2t + 10e^{2t} \sin t$

(c) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$ (d) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$

7. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' - 3 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(a) $b(t) = 0$ (b) $b(t) = t$ (c) $b(t) = e^{-t}$

8. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

9. Considere a equação

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = t + \sin t \tag{3}$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogênea correspondente a (3).
 (b) Determine uma solução particular de (3).
 (c) Determine a solução de (3) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

10. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y = 1 - \frac{1}{t}$$

- (a) Determine soluções da equação homogênea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{At}$, e aproveite os resultados para escrever a solução geral da equação homogênea.

- (b) Calcule a solução da equação que verifica as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

Soluções

$$1. \text{ (a) } e^{At} = I \quad \text{(b) } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix} \quad \text{(c) } e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{(d) } e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(e) } e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 6t & 12t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$$

$$\text{(f) } e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (t + \frac{1}{2})e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ (a) } \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 5te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t}\cos(\pi t) & e^{-2t}\sin(\pi t) \\ 0 & 0 & -e^{-2t}\sin(\pi t) & e^{-2t}\cos(\pi t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\text{(b) } \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-2t}}{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(\pi t) \\ 1 - \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 + 2e^{t^2/2} \end{bmatrix}$$

$$5. e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6. \text{ (a) } y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{10} (\sin t + 2 \cos t) \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{(b) } y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 - t^2 - e^{2t} \cos t \text{ com } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(c) } y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} - \frac{1}{8} t^2 - \frac{1}{12} t^3 \text{ com } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{(d) } y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + e^t (t \log |t| - t) \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$7. \text{ (a) } y(t) = -5 + 5e^{-t} + 2te^{-t} + 3t \quad \text{(b) } y(t) = -2 + 2e^{-t} + te^{-t} + \frac{t^2}{2} + t$$

$$\text{(c) } y(t) = -4 + 4e^{-t} + te^{-t} + 3t - \frac{t^2 e^{-t}}{2}$$

$$8. y(x) = e^x (\cos x - \sin x + \cos x \log(\cos x) + x \sin x)$$

9. (a) $y_H(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{2t}$, com c_1, c_2, c_3 e $c_4 \in \mathbb{R}$

(b) $y_p(t) = \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\sin t + 3 \cos t}{10}$ (c) $y(t) = \frac{27}{16} + \frac{11}{8}t - \frac{3}{2}e^t + \frac{9}{80}e^{2t} + \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\sin t + 3 \cos t}{10}$

10. (a) $\lambda = k = 1$; $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t$ (b) $y(t) = (2 + \log 2)t - 2e^{t-2} - 1 - t \log t$

8 Exercícios da 10ª Semana — 9 de novembro

1. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$

(b) $y'' + 8y' + 41y = 0$

(c) $(D + 2)^2(D^2 - 2D + 5)^3(D - 1)y = 0$

(d) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

(e) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$

2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$

(b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$

(c) $y^{(3)} + 4y'' - 5y' = 0$ verificando $y(0) = 4$, $y'(0) = -7$ e $y''(0) = 23$

(d) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ verificando
 $y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0$ para quaisquer $a_i \in \mathbb{R}$.

3. Seja m um número real estritamente positivo. Obtenha a solução do (PVI)

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y''(0) = 1$$

4. Considere a equação diferencial

$$y''' + a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

onde a_0 , a_1 e a_2 são constantes reais. Sabe-se que duas soluções linearmente independentes desta equação são dadas por $y_1(x) = xe^{-x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$.

(a) Encontre uma terceira solução linearmente independente.

(b) Determine a_0 , a_1 e a_2 com as propriedades acima descritas.

5. Obtenha as equações lineares homogêneas de coeficientes constantes, de menor ordem possível, cujo coeficiente da derivada de maior ordem é igual a 1 e que têm as funções abaixo como solução:

(a) $e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}$.

(b) $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \cos x, \operatorname{sen} x$

(c) $1, x, e^x$;

6. Determine a solução geral dos sistemas:

$$(a) \begin{cases} x' = -4x - 3y \\ y' = 2x + 3y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - y \\ z' = -x - z \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases}$$

7. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, onde:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: determine uma solução particular constante.

Soluções

- $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$
 - $y(x) = e^{-4x}(c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x))$
 - $y(t) = (A + Bt)e^{-2t} + (C + Dt + Et^2)e^t \cos 2t + (F + Gt + Ht^2)e^t \sin 2t + Ie^t$ com $A, B, C, D, E, F, G, H, I \in \mathbb{R}$
 - $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$
 - $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t + c_5 t^2 e^t$
- $y(t) = \cos t + \sin t$
 - $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$
 - $y(t) = 5 - 2e^t + e^{-5t}$
 - $y(t) = 0$
- $y(x) = \frac{1}{2}t^2 e^{mx}$
- $a_0 = 0, a_1 = -3$ e $a_2 = -2$
- $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
 - $y^{(4)} - y = 0$
 - $y''' - y'' = 0$
- Nota:** as soluções são apresentadas a menos de uma transformação linear da base do espaço de soluções. Para obter uma dessas bases pode-se utilizar vários métodos, produzindo outras tantas respostas equivalentes.
 - $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{-3t} \\ -2e^{2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$
 - $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos t - \sin t \\ \sin t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$
 - $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$
 - $\mathbf{X}(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} -3t + 4 \\ 3t - 3 \end{bmatrix}$
 - $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{5(t-1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}, \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

9 Exercícios da 11ª Semana — 16 de novembro

1. Calcule as transformadas de Laplace e os domínios de convergência das funções definidas em $[0, +\infty[$ pelas expressões seguintes:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & 4t - 2 & \text{(b)} & 2 \cos t + 3 \operatorname{sh}(2t) & \text{(c)} & e^{-3t} \cos(2t) & \text{(d)} & H_1(t)(t-1)^2 \\ \text{(e)} & te^{at} & \text{(f)} & \sin^2(\omega t) & \text{(g)} & f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } t > 1 \end{cases} & \text{(h)} & \frac{\sin t}{t} (t > 0). \end{array}$$

Nota: para a alínea (h), use o valor do integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$.

2. Determine as funções cujas transformadas de Laplace são dadas por

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \frac{2s}{s^2 + 1} & \text{(b)} & \frac{s-6}{(s-1)^2 + 4} & \text{(c)} & \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)} & \text{(d)} & \frac{18s-12}{9s^2-1} \\ \text{(e)} & (s^2-1)^{-2} & \text{(f)} & \frac{s+1}{s^2+s-6} & \text{(g)} & \frac{1}{(s+1)^4} & \text{(h)} & \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \end{array}$$

3. Utilizando a transformada de Laplace, resolva os seguintes problemas de valor inicial:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 4y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2 \\ \text{(b)} & y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 7 \\ \text{(c)} & y'' + 3y' - 4y = 6e^{2t-2}, y(0) = y'(0) = 0 \\ \text{(d)} & y''' - y'' + y' - y = 1, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \\ \text{(e)} & y'' + y = f(t), y(0) = y'(0) = 0, \text{ sendo} \end{array}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(f)} & 4y'' + 9y = 9tH_1(t), y(0) = y'(0) = 0 \\ \text{(g)} & y'' + y = \delta_\pi(t) - \delta_{2\pi}(t), y(0) = 0, y'(0) = 0 \\ \text{(h)} & y'' + y = \delta_\pi(t) \cos t, y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{array}$$

onde $\delta_c(t)$ representa a distribuição delta de Dirac centrada em c ; ou seja, $\delta_c(t) = \delta(t-c)$.

4. Sendo λ uma constante real e $t_0 > 0$, considere a seguinte equação diferencial:

$$x'' + x = \lambda H_{2\pi}(t) - H_{t_0}(t)$$

Suponha as condições iniciais dadas por $x(0) = x'(0) = 0$.

- (a) Obtenha a solução do problema (em função de t_0).
- (b) Obtenha os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ e de $t_0 > 2\pi$ para os quais $x(t) = 0$ para todo $t > t_0$.

5. Resolva as equações seguintes:

- (a) $yu_x - xu_y = 0$,
- (b) $2u_x + 3u_y = 1$,
- (c) $u_x + u_y = u$.

6. Resolva os problemas seguintes:

- (a) $u_x + 2u_y = 0$, $u(x, 0) = \sin x$;
- (b) $u_x + 4u_y = 0$, $u(x, 0) = 1/(1 + x^2)$;
- (c) $yu_x - xu_y = 0$, $u(x, 0) = x$, com $x > 0$;
- (d) $u_x + xu_y = 0$, $u(0, y) = \sin y$;
- (e) $yu_x - 2xyu_y = 2xu$, $u(0, y) = y^2$, com $y > 0$.

Soluções

1. (a) $\frac{4-2s}{s^2}, s > 0$ (b) $\frac{2s}{s^2+1} + \frac{6}{s^2-4}, s > 2$ (c) $\frac{3+s}{s^2+6s+13}, s > -3$ (d) $\frac{2e^{-s}}{s^3}, s > 0$
 (e) $\frac{1}{(s-a)^2}, s > a$ (f) $\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}, s > 0$ (g) $\frac{1-e^{-s}}{s}, s > 0$
 (h) $\frac{\pi}{2} - \arctan s = \operatorname{arc cotg} s, s > 0$
2. (a) $2 \cos t$ (b) $e^t \cos(2t) - \frac{5}{2} e^t \sin(2t)$ (c) $\frac{t}{\omega^2} - \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega^3}$ (d) $2 \operatorname{ch} \frac{t}{3} - 4 \operatorname{sh} \frac{t}{3}$
 (e) $\frac{t}{2} \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \operatorname{sh} t$ (f) $\frac{3}{5} e^{2t} + \frac{2}{5} e^{-3t}$ (g) $\frac{t^3}{6} e^{-t}$ (h) $\frac{1}{2\omega^3} (\operatorname{sen}(\omega t) - \omega t \cos(\omega t))$
3. A solução, $y(t)$, é dada por:
 (a) $\cos \frac{t}{2} - 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}$ (b) $2e^{3t} - e^{-t}$ (c) $e^{-2} \left(e^{2t} - \frac{6}{5} e^t + \frac{1}{5} e^{-4t} \right)$
 (d) $-1 + \frac{1}{2} (e^t + \cos t - \operatorname{sen} t)$ (e) $(1 - \cos(t-1))H_1(t) - (1 - \cos(t-2))H_2(t)$
 (f) $H(t-1) \left(t - \frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{3(t-1)}{2} - \cos \frac{3(t-1)}{2} \right)$
 (g) $-(H(t-\pi) + H(t-2\pi)) \sin t$ (h) $(1 - H(t-\pi)) \sin t$
4. (a) $x(t) = \lambda H(t-2\pi)(1 - \cos t) - H(t-t_0)(1 - \cos(t-t_0))$
 (b) $\lambda = 1$ e $t_0 = 2k\pi$, com $k = 2, 3, 4, \dots$
5. (a) $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$
 (b) $u(x, y) = (y + f(3x - 2y))/3$
 (c) $u(x, y) = e^{x+f(x-y)}$
6. (a) $u(x, y) = \operatorname{sen} \frac{2x-y}{2}$
 (b) $u(x, y) = \frac{16}{16 + (4x - y)^2}$
 (c) $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
 (d) $u(x, y) = \operatorname{sen} y - x^2/2$
 (e) $u(x, y) = (x^2 + y)^3/y$

10 Exercícios da 12ª Semana — 16 de novembro

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida em pontos adequados, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

4. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ por

$$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-\pi, \pi]$.

5. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-2, 2]$.

6. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

7. Determine a série de cossenos da função $r(x) = x$ no intervalo $[0, \pi]$, indicando a soma da série em $\mathbb{R}$.

8. Considere a função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico da extensão par de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de cossenos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série em $[0, 2]$.
- (b) Esboce o gráfico da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de senos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série em $[0, 2]$.
9. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:
- a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$
- b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$
10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0, 1[\\ u(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) - 3 \sin(4\pi x).$$

11. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in]-1, 1[, \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(-1, t) = u(1, t) \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = 3 \cos(\pi x) - 4 \sin(5\pi x). \end{cases}$$

Soluções

1. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{2n+1}$
2. $\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x = 0$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
3. $\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x = L$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;
fazendo $x = 0$, obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$
4. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right] = \begin{cases} j(x) & \text{se } -\pi < x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = \pm\pi \end{cases}$
5. $\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} + (1 - \cos \frac{n\pi}{2}) \sin \frac{n\pi x}{2} \right] = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$
6. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$
7. $SF_{\cos} r(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos((2n-1)x) =$
 $= \begin{cases} x - 2k\pi & \text{se } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \\ 2k\pi - x & \text{se } (2k-1)\pi < x < 2k\pi \end{cases} \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$
8. (a) $SF_{\cos} f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4}{n^2\pi^2} (1 - \cos \frac{n\pi}{2}) - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos \frac{n\pi x}{2} =$
 $= \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \end{cases}.$
 (b) $SF_{\sin} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n + \cos \frac{n\pi}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin \frac{n\pi x}{2} =$
 $= \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}.$
9. (a) $\lambda = n^2\pi^2$, para $n \in \mathbb{Z}^+$
 (b) $\lambda = n^2$, para $n \in \mathbb{Z}_0^+$
10. $u(x, t) = e^t \left(e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x) - 3e^{-16\pi^2 t} \sin(4\pi x) \right)$
11. $u(x, t) = 3e^{-\alpha^2 \pi^2 t} \cos(\pi x) - 4e^{-\alpha^2 25\pi^2 t} \sin(5\pi x)$

11 Exercícios da 13ª Semana — 30 de novembro

1. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin(x) - 2 \sin(5x). \end{cases}$$

2. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in (0, L), \quad \text{com} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

3. Resolva o seguinte problema de valores de fronteira e inicial para $0 < x < \pi$ e $t > 0$

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(3x) \end{cases}$$

4. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x.$$

5. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

- (a) Determine a série de cossenos da função f .

- (b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \quad x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

6. Considere a equação de propagação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (*)

- (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

- (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$.

(c) Resolva a equação (*) para $0 \leq x \leq 1$ e para as condições iniciais e de fronteira $\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$

7. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\cos t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t, 0) = 0 & t > 0, \\ u(t, \pi) = 0 & t > 0, \\ u(0, x) = \sin x + 2 \sin x \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

8. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$, satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, 1[$, e onde c é uma constante real positiva.

9. Considere o seguinte problema de valores na fronteira, para $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = f(x) \end{cases} \quad (4)$$

sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cossenos da função f no intervalo $[0, 1]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (4).

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de

Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in [0, 1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y)$$

11. Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \sin x$.

- (a) Determine a série de Fourier de cossenos da função f .
- (b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.
- (c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, & x \in]0, \pi[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

12. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. $e^{-\alpha^2 t} \operatorname{sen}(x) - 2e^{-25\alpha^2 t} \operatorname{sen}(5x)$
2. $e^{-\left(1+\frac{9\pi^2}{L^2}\right)t} \cos \frac{3\pi x}{L}$
3. $u(x, t) = \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(3t) \operatorname{sen}(3x)$
4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(1+n^2)t} \operatorname{sen}(nx)$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3 \pi} e^{-(1+n^2)t} \operatorname{sen}(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(1+(2n+1)^2)t}}{(2n+1)^3} \operatorname{sen}((2n+1)x)$
5. (a) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n - 1)}{n^2 \pi} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \pi - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$
 (b) $\pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} e^{-\frac{n^2 t + 2t^2}{4}} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)$
6. (b) $u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$
 (c) $20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi} (11 - 3(-1)^n) e^{-n^2 \pi^2 \alpha t} \operatorname{sen}(n\pi x)$
7. $u(t, x) = e^{-\operatorname{sen} t} \operatorname{sen}(x) + e^{-4 \operatorname{sen} t} \operatorname{sen}(2x)$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2 \pi^2 c} \operatorname{sen}(n\pi c t) \operatorname{sen}(n\pi x)$
9. (a) $SF_{\cos} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1/2, \\ 0 & \text{se } x = 1/2 \\ -1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$
 (b) $u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi \operatorname{sh} n\pi} \cos(n\pi x) \operatorname{sh}(n\pi y)$
10. $C + \frac{\operatorname{ch}(2\pi x) \cos(2\pi y) + \operatorname{ch}(2\pi y) \cos(2\pi x)}{2\pi \operatorname{sh}(2\pi)}, C \in \mathbb{R}$
11. (a) $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \cos(nx) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \cos(2nx)\right)$
 (b) $|\operatorname{sen} x|$ (c) $\frac{2}{\pi} e^{2t} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(2-4n^2)t}}{4n^2-1} \cos(2nx)$
12. $u(x, y, t) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \operatorname{sen}(2\pi x) \operatorname{sen}(2\pi y) \operatorname{sen}(2\sqrt{2}\pi t)$