

1. Considere o subconjunto $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = (2 - z)^2, -1 < z < 1\}$ de um cone no espaço $\mathbb{R}^3$.

- (a) (3 val.) Escreva uma parametrização $g: U \rightarrow C$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto indicando explicitamente o domínio de g .

Resolução

Uma parametrização é $g(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2})$ com $U = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$.

- (b) (3 val.) Escreva uma base de $\mathbb{R}^3$ de vetores tangentes e normais a C no ponto $(2, 0, 0)$ indicando quais vetores são tangentes e quais são normais.

Resolução

Usando a parametrização $g(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2})$, obtém-se vetores tangentes

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2, 0) = (1, 0, -1) = v_1 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(2, 0) = (0, 1, 0) = v_2.$$

Um vetor normal é $v_3 = v_1 \times v_2 = (1, 0, 1)$. É claro que $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

2. (6 val.) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície dada pelo gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y$, com $0 < x < 1$ e $y^2 < 2 + 4x^2$. Sendo a densidade em cada ponto de S dada por $\sigma(x, y, z) = x$, calcule a massa de S .

Resolução

Seja $U = \{(x, y) : 0 < x < 1, y^2 < 2 + 4x^2\}$. Usando a parametrização $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$, a massa de S é

$$M = \int_S \sigma dS = \iint_U x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{2+4x^2}}^{\sqrt{2+4x^2}} x \sqrt{2+4x^2} dy dx = 4.$$

3. (8 val.) Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (e^z, yz^2, y^2z)$ através o cilindro $S = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 9; -1 < x < 1\}$ no sentido do campo normal $n(x, y, z) = (0, y, z)$ a S .

Resolução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o volume $y^2 + z^2 < 9$ e $-1 < x < 1$, ν o campo normal unitário exterior, $S = \{(x, y, z) : -1 < x < 1, y^2 + z^2 = 9\}$ e $D_{\pm} = \{(\pm 1, y, z) : y^2 + z^2 < 9\}$. Pelo teorema de divergência tem-se

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz &= \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \\ \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_S \langle F, \nu \rangle + \int_{D_+} e^z - \int_{D_-} e^z \\ \int_{-1}^1 \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr dx &= \int_S \langle F, \nu \rangle \\ 3^4 \pi &= \int_S \langle F, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Portanto o fluxo é 81π .

1. Considere o subconjunto $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2 - z, -1 < z < 1\}$ de um parabolóide no espaço $\mathbb{R}^3$.
- (a) (3 val.) Escreva uma parametrização $g: U \rightarrow C$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto indicando explicitamente o domínio de g .

Resolução

Uma parametrização é $g(x, y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2)$ com $U = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 3\}$.

- (b) (3 val.) Escreva uma base de $\mathbb{R}^3$ de vetores tangentes e normais a C no ponto $(1, 1, 0)$ indicando quais vetores são tangentes e quais são normais.

Resolução

Usando a parametrização $g(x, y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2)$, obtém-se vetores tangentes

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = \mathbf{v}_1 = (1, 0, -2) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = \mathbf{v}_2 = (0, 1, -2).$$

Um vetor normal é $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (2, 2, 1)$. É claro que $\{(1, 0, -2), (0, 1, -2), (2, 2, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

2. (6 val.) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície dada pelo gráfico da função $f(x, y) = y - x^2$, com $-1 < x < 1$ e $y^2 < 2 + 4x^2$. Sendo a densidade em cada ponto de S dada por $\sigma(x, y, z) = x^2$, calcule a massa de S .

Resolução

Seja $U = \{(x, y) : -1 < x < 1, y^2 < 2 + 4x^2\}$. Usando a parametrização $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$, a massa de S é

$$M = \int_S \sigma dS = \iint_U x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{2+4x^2}}^{\sqrt{2+4x^2}} x^2 \sqrt{2+4x^2} dy dx = \frac{88}{15}.$$

3. (8 val.) Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (xz^2, e^{1-x}, x^2z)$ através o cilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 4, 0 < y < 2\}$ no sentido do campo normal $\mathbf{n}(x, y, z) = (x, 0, z)$ a C .

Resolução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o volume $x^2 + z^2 < 4$ e $0 < y < 2$, $\mathbf{v}$ o campo normal unitário exterior, $C = \{(x, y, z) : 0 < y < 2, x^2 + z^2 = 4\}$, $D_0 = \{(x, 0, z) : x^2 + z^2 < 4\}$ e $D_2 = \{(x, 2, z) : x^2 + z^2 < 4\}$. Pelo teorema de divergência tem-se

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz &= \int_{\partial\Omega} \langle F, \mathbf{v} \rangle \\ \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) dx dy dz &= \int_C \langle F, \mathbf{v} \rangle - \int_{D_0} e^{1-x} + \int_{D_2} e^{1-x} \\ \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr dx &= \int_C \langle F, \mathbf{v} \rangle \\ 16\pi &= \int_C \langle F, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto o fluxo é 16π .