

1. (6 val.) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície com a parametrização $\phi(u, v) = (2u, 3v, u + v)$ para $1 < u < 2$ e $0 < v < 1$. Calcule $\int_S x$.

Solução:

Como $\phi(u, v) = (x, y, z)$,

$$D\phi(u, v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D\phi(u, v)^t D\phi(u, v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

segue que

$$\omega_\phi = \sqrt{\det D\phi^t D\phi} = \sqrt{50 - 1} = 7,$$

e portanto

$$\int_S x = \int_1^2 \int_0^1 2u \cdot 7 \, dv \, du = 21.$$

2. (7 val.) Considere o parabolóide $S = \{(x, y, z) : z = 4 - x^2 - y^2 \text{ e } z > 0\}$ e o campo normal $\mathbf{n}(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$ a S . Calcule o fluxo do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2, 3x^2y + y^3, -z)$ através S no sentido do campo normal $\mathbf{n}(x, y, z)$.

Solução:

O parabolóide S é o subconjunto do conjunto de nível

$$N = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = 4\}$$

com $z > 0$ e é um gráfico da função $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Portanto tem um normal $\nabla g = (2x, 2y, 1)$, uma parametrização $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, com $x^2 + y^2 < 4$, e

$$\omega_\phi = \sqrt{\det D\phi^t D\phi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = \|\nabla g\|.$$

Logo o fluxo é

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\langle \mathbf{F}(x, y, z), (2x, 2y, 1) \rangle}{\|(2x, 2y, 1)\|} &= \iint_{x^2 + y^2 < 4} \langle \mathbf{F}(x, y, z), (2x, 2y, 1) \rangle dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 < 4} ((x + y^2)2x + (3x^2y + y^3)2y + x^2 + y^2 - 4) dx dy. \end{aligned}$$

Para simplificar os cálculos consideremos o volume $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$ e o disco $D = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 4\}$. Pelo teorema de divergência temos

$$\int_S \langle \mathbf{F}, \nu \rangle = \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz + \int_D \langle \mathbf{F}, (0, 0, -1) \rangle.$$

A divergência de $\mathbf{F}$ é $3(x^2 + y^2)$ e $\langle \mathbf{F}(x, y, 0), (0, 0, -1) \rangle = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \int_S \langle \mathbf{F}, \nu \rangle &= \int_\Omega 3(x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} 3r^2 \cdot r dz d\theta dr \\ &= 6\pi \int_0^2 r^3(4 - r^2) dr \\ &= 32\pi. \end{aligned}$$

3. Considere a função $f(x, y) = 3 - x - y$, a superfície $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \text{ e } x^2 + y^2 < 1\}$, orientada por o normal $\mathbf{n}(x, y, z) = (1, 1, 1)$, e o campo vetorial $\mathbf{G}(x, y, z) = (ye^x, x + e^x, z^2)$.

(a) (2 val.) Calcule $\text{rot } \mathbf{G}$.

Solução:

$$\text{rot } \mathbf{G}(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

(b) (2 val.) Determine uma parametrização de ∂S que percorre no sentido induzido por $\mathbf{n}(x, y, z)$.

Solução:

A superfície S é o gráfico do disco $x^2 + y^2 < 1$ no plano $\mathbb{R}^2$ da função f . Logo ∂S é a imagem de $x^2 + y^2 = 1$, e uma parametrização compatível com o normal $(1, 1, 1)$ é

$$\gamma(\theta) = (\cos t, \sin t, 3 - \cos t - \sin t).$$

(c) (3 val.) Calcule o integral de linha $\oint_{\partial S} \langle \mathbf{G}, \tau \rangle$, onde τ é o campo tangente na direcção induzido por $\mathbf{n}(x, y, z)$.

Solução:

Pelo teorema de Stokes temos

$$\int_{\partial S} \langle \mathbf{G}, \tau \rangle = \int_S \langle \text{rot } \mathbf{G}, \nu \rangle = \int_S \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A superfície tem uma parametrização $\phi(x, y) = (x, y, 3 - x - y)$ com $x^2 + y^2 < 1$. Logo

$$\int_{\partial S} \langle \mathbf{G}, \tau \rangle = \iint_{x^2 + y^2 < 1} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dx dy = \pi.$$