

NOME _____ NÚMERO _____

CLASSIFICAÇÕES _____

1. (3 val.) Considere a superfície $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 < z < 1\}$ e o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície Σ segundo o vetor normal $\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, 0)/2$.

2. (3 val.) Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } z < 1\}$ e a sua bordo $C = \partial S$. Calcule o integral de linha do campo vetorial $\mathbf{G}(x, y, z) = (y, x^2, 0)$ ao longo do caminho γ da alínea anterior. *Sugestão:* Calcule $\text{rot } \mathbf{G}$ e use o teorema de Stokes.

3. (3 val.) Considere a equação diferencial $(1 + x^2 + y^2) + xy \frac{dy}{dx} = 0$. Determine explicitamente a solução da equação que satisfaz $y(-1) = -1$.

4. (3 val.) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e a função $\mathbf{b}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$. Determine a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. (4 val.) Resolva o problema de valor inicial $x'' + 2x' + x = f(t)$, $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$, onde

$$f(t) = \begin{cases} t(t - \pi), & t < \pi; \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

6. (4 val.) Use o método de separação variáveis para determinar uma solução formal do problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2tu, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < 1; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, & t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0, & t > 0.\end{aligned}$$

NOME _____ NÚMERO _____

CLASSIFICAÇÕES _____

1. (3 val.) Considere a superfície $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 < z < 1\}$ e o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície Σ segundo o vetor normal $\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, 0)/2$.

2. (3 val.) Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } z < 1\}$ e a sua bordo $C = \partial S$. Calcule o integral de linha do campo vetorial $\mathbf{G}(x, y, z) = (y, x^2, 0)$ ao longo do caminho γ da alínea anterior. *Sugestão:* Calcule $\text{rot } \mathbf{G}$ e use o teorema de Stokes.

3. (3 val.) Considere a equação diferencial $(1 - x^2 - y^2) + xy \frac{dy}{dx} = 0$. Determine explicitamente a solução da equação que satisfaz $y(-1) = -1$.

4. (3 val.) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e a função $\mathbf{b}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}$. Determine a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. (4 val.) Resolva o problema de valor inicial $x'' + 2x' + x = f(t)$, $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$, onde

$$f(t) = \begin{cases} t(t - \pi), & t < \pi; \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

6. (4 val.) Use o método de separação variáveis para determinar uma solução formal do problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tu, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= g(x), & 0 < x < 1; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, & t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0, & t > 0.\end{aligned}$$