

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre de 2019/2020

MEAer

Exercícios para as aulas práticas

## Conteúdo

I	Números complexos (16-20/9/2019) . . . . .	1
II	Números complexos, funções complexas (23-27/9/2019) . .	3
III	Transformações conformes e diferenciabilidade de funções complexas (30/9 – 4/10/2019) . . . . .	5
IV	Diferenciabilidade de funções complexas em coordenadas polares, séries de potências complexas, exponencial, logaritmo (7-11/10/2019) . . . . .	6
V	Integrais de Funções Complexas, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy (14-18/10/2019) . . . . .	8
VI	Séries de Taylor e de Laurent, Teorema dos Resíduos (21-25/10/2019) . . . . .	10
VIII	Esboço de campos de direções (4-8/11/2019) . . . . .	12
IX	Edo's escalares de primeira ordem (11-15/11/2019) . . . . .	13
X	Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (18-22/11/2019) . . . . .	14
XI	Edo's escalares de primeira ordem, Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (25-29/11/2019) . . . . .	18
XII	Edo's lineares escalares de ordem superior a um (2-6/12/2019)	21
XIII	Séries de Fourier, equação do calor, equação das ondas, equação de Laplace (19-13/12/2019) . . . . .	22

## I Números complexos (16-20/9/2019)

1. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica e represente-os no plano de Argand:

a)  $(2 + i)(1 - i) = 3 - i$ ,

b)  $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$ ,

c)  $\frac{2+i}{1+i} = \frac{3-i}{2}$ ,

d)  $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$ ,

e)  $(1 - 2i)^3 = -11 + 2i$ ,

f)  $i^{81} = i$ .

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os no plano de Argand:

a)  $3 = 3E(i0)$ ,

b)  $-2 = 2E(i\pi)$ ,

c)  $1 + i = \sqrt{2}E(i\frac{\pi}{4})$ ,

d)  $3 - 4i = 5E(-i \arctan \frac{4}{3})$ ,

e)  $-1 - i = \sqrt{2}E(i\frac{5\pi}{4})$ .

3. Verifique as seguintes propriedades do conjugado:

a)  $\overline{\overline{z}} = z$ .

b)  $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ ,

c)  $\overline{z\overline{w}} = \overline{z} w$ ,

d)  $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ .

4. Verifique as seguintes propriedades do módulo:

a)  $|\overline{z}| = |z|$ .

b)  $|zw| = |z| |w|$ ,

c)  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ ,

d)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ ,

e)  $|z - w| \geq ||z| - |w||$ .

5. Calcule as raízes cúbicas de  $-8i$  e assinale-as no plano complexo.

Resposta:  $2E(-i\frac{\pi}{6})$ ,  $2E(i\frac{\pi}{2})$ ,  $2E(i\frac{7\pi}{6})$ .

6. Determine para que valores de  $\theta$ , pertencentes ao intervalo  $]-\pi, \pi]$ , se tem

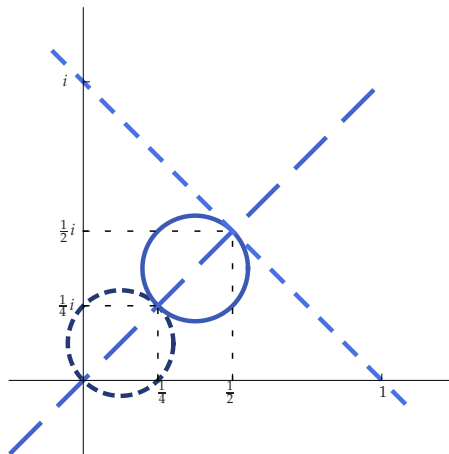
$$|1 + E(i\theta)| = \sqrt{2}.$$

Resposta:  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

7. Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  três números complexos de módulo unitário satisfazendo  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ . Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero. Sugestão: Comece por reduzir ao caso em que  $z_1 = 1$ ; verifique que então  $z_2$  e  $z_3$  são conjugados; logo  $z_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  e  $z_3 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .
8. Determine as soluções das seguintes equações:
- (i)  $(1 - z)^6 = (1 + z)^6$ . Resposta:  $0, \pm i\sqrt{3}, \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ .
  - (ii)  $1 - z + z^2 = 0$ . Resposta:  $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .
  - (iii)  $z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$ . Resposta:  $\pm 1, E(\pm i\frac{\pi}{4}), E(\pm i\frac{3\pi}{4})$ .
  - (iv)  $1 + z + z^2 + \dots + z^7 = 0$ . Resposta:  $-1, \pm i, E(\pm i\frac{\pi}{4}), E(\pm i\frac{3\pi}{4})$ .

## II Números complexos, funções complexas (23-27/9/2019)

- Calcule e represente no plano de Argand:
  - $\sqrt[3]{i}$ . Resposta:  $E(i\frac{\pi}{6}), E(i\frac{5\pi}{6}), E(i\frac{3\pi}{2})$ .
  - $\sqrt[4]{-1}$ . Resposta:  $E(i\frac{\pi}{4}), E(i\frac{3\pi}{4}), E(i\frac{5\pi}{4}), E(i\frac{7\pi}{4})$ .
  - $\sqrt{1-i}$ . Resposta:  $\sqrt[4]{2}E(-i\frac{\pi}{8}), \sqrt[4]{2}E(i\frac{7\pi}{8})$ .
- Verifique se  $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ .
- Determine a equação da reta que passa por  $-1$  e  $i$ . Resposta:  $(-1+i)\bar{z} + (-1-i)z - 2 = 0$ .
  - Determine a equação da circunferência que tem centro em  $-1$  e passa por  $i$ . Resposta:  $|z+1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} - 1 = 0$ .
  - Determine dois pontos da reta  $(1-2i)z + (1+2i)\bar{z} - 2 = 0$ . Resposta:  $1$  e  $\frac{i}{2}$ .
  - Determine o centro e o raio da circunferência  $|z|^2 - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + 1 = 0$ . Resposta:  $1+i$  e  $1$ .
- Represente a imagem das duas retas e das duas circunferências por  $z \mapsto \frac{1}{z}$ :



- Calcule as imagens das regiões  $R$  pelas funções  $f$ :
  - $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \pi/4 < \arg z < \pi/2\}, f(z) = z^3$ .

b)  $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ ,  $f(re(i\theta)) = \sqrt[3]{r}E(i\theta/3)$  com  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

c)  $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z+1}$ .

Resposta:  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > \frac{1}{2}\}$

d)  $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $f(z) = \frac{z-1}{iz+1}$ .

Resposta:  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(1-i)z > 0\}$ .

e)  $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \Re z < 2, 0 < \Im z < 1, |z-2| > 1\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z-1}$ .

Resposta:  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$ .

f)  $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1, \Im z < 0\}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z+i}$ .

Resposta:  $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$

6. Sejam  $a$  e  $b$  números complexos. Prove usando complexos que

$$\Re\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0$$

representa a equação de uma circunferência com diâmetro de extremidades em  $a$  e  $b$ .

### III Transformações conformes e diferenciabilidade de funções complexas (30/9 – 4/10/2019)

1. Calcule as imagens das regiões  $R$  pelas funções  $f$ :

a)  $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ ,  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$  (transformação conforme de um semiplano num disco).

b)  $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z > 0\}$ ,  $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$  (transformação conforme de um semidisco num semiplano).

c)  $R = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i0 \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1]\}$ ,  $f(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$  (transformação conforme do complemento de um segmento de reta num semiplano).

2. Estude a diferenciabilidade de  $x + iy \mapsto e^x E(iy)$ .

Resposta: A função é diferenciável em qualquer  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  e com derivada igual à função.

3. Estude a diferenciabilidade da função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + \cos y).$$

Resposta:  $f$  é diferenciável quando  $y = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Neste caso,  $f'(z) = 2z$ .

4. Estude a diferenciabilidade das funções  $z \mapsto \bar{z}^2$ ,  $z \mapsto z^2 \bar{z}$  e  $z \mapsto |z| \bar{z}$ .

Resposta: Qualquer das funções é diferenciável apenas em  $z = 0$  e com derivada nula.

5. Estude a diferenciabilidade da função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$f(x + iy) = \frac{1}{3}(x + 1)^3 + y^2 + iy.$$

Resposta:  $f'(-2, 0) = 1$  e  $f'(0, 0) = 1$ .

6. Determine o conjunto dos pontos onde a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$f(x + iy) = -(x + 1)E(iy) + i(x - 1)E(-iy),$$

é diferenciável.

Resposta:  $f$  é diferenciável quando  $x = 0$  ou quando  $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### IV Diferenciabilidade de funções complexas em coordenadas polares, séries de potências complexas, exponencial, logaritmo (7-11/10/2019)

1. Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, prove a diferenciabilidade e calcule a derivada de

a)  $z \mapsto 1/z^n$  com  $n \in \mathbb{N}_1$ ;

b)  $z \mapsto \sqrt[n]{z}$  onde  $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$  com  $-\pi < \theta \leq \pi$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ .  
Esta função é diferenciável no eixo real negativo? E em zero?

2. Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada da função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(re^{i\theta}) = r^2 + i\theta$  para  $r > 0$  e  $-\pi < \theta \leq \pi$ , e por  $f(0) = 0$ .

3. Considere a função  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$f(re^{i\theta}) = (r \ln r - r^2)e^{i\theta}.$$

a) Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada de  $f$ .

b) Determine se  $f$  pode ser prolongada por continuidade à origem. Em caso afirmativo, estude a diferenciabilidade do prolongamento na origem.

4. Determine o raio de convergência de

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , Resposta:  $R = 1$ ,

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ , Resposta:  $R = 1$ ,

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n$ , Resposta:  $R = e^{-1}$ ,

d)  $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ , Resposta:  $R = 0$ ,

e)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n}z^n$ , Resposta:  $R = 4$ ,

f)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(-1)^n z^n$ , Resposta:  $R = 0$ ,

g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n$ , Resposta:  $R = 1/2$ .

5. Esboce a imagem de  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1, 0 < \Im z < \pi\}$  por  $z \mapsto e^z$ .

6. Obtenha o desenvolvimento em série de potências de  $\sin z$ .

7. Estude a diferenciabilidade de  $z \mapsto \log z$ , onde

$$\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \quad \text{com } -\pi < \theta \leq \pi$$

é o logaritmo principal.

8. Esboce a imagem de  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0, |z| > 1\}$  por  $z \mapsto \log z$  onde  $\log$  designa o logaritmo principal.

9. Calcule

a)  $\log(-i)$ , Resposta:  $-i\pi/2$ ,

b)  $\log(1-i)$ , Resposta:  $\ln 2/2 - i\pi/4$ ,

c)  $\log(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ , Resposta:  $i\pi/3$ ,

d)  $i^i$ . Resposta:  $e^{-\pi/2}$ ,

10. Estabeleça as seguintes identidades (onde  $z \in \mathbb{C}$ ):

a)  $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ ,

b)  $\cos(iz) = \cosh(z)$ ,

c)  $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$ ,

d)  $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$ .

e)  $\operatorname{sen}\left(-i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)\right) = z$ .

11. Mostre que a função  $\operatorname{sen} z$  é ilimitada em qualquer reta não paralela ao eixo real.

12. Resolva as seguintes equações:

a)  $e^z = -1$ , Resposta:  $z = i(2k+1)\pi$ ,

b)  $\log(i-z) = 1$ , Resposta:  $z = -e + i$ ,

c)  $\operatorname{sen} z - \cos z = i$ , Resposta:  $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$  ou  
 $z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .



## V Integrais de Funções Complexas, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy (14-18/10/2019)

1. Calcule usando a definição

a)  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$  onde  $\gamma$  é o segmento de reta que une 1 a  $2 + 3i$ . r:  $6 + 3i$ .

b)  $\int_{\gamma} z^2 dz$ , onde  $\gamma$  é o arco de circunferência que une 3 a  $1 - 2i$  e que passa por  $1 + 2i$ . r:  $\frac{(1-2i)^3}{3} - \frac{3^3}{3}$ .

c)  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$  onde  $\gamma$  é o troço de parábola  $\{x + iy \in \mathbb{C} : y = x^2\}$  com início em 0 e fim em  $1 + i$ . r:  $1 + \frac{i}{3}$ .

d)  $\int_{|z|=r} \arg z |dz|$ , onde  $\arg z$  designa o argumento principal. r: 0.

2. Calcule ao longo de uma curva no primeiro quadrante:

a)  $\int_2^{1+i} z dz$ ; r:  $-2 + i$

b)  $\int_1^i (1 + \sqrt{z}) dz$ , onde  $\sqrt{z}$  designa a raiz principal; r:  $i - 1 + \frac{2}{3} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - 1 \right)$ ;

c)  $\int_0^{1+i\pi/2} e^{2z} dz$ ; r:  $-\frac{1+e^2}{2}$

d)  $\int_1^i \frac{1}{z} dz$ ; r:  $\frac{i\pi}{2}$ .

3. Justifique que

a)  $z \mapsto \int_0^z e^{\operatorname{sen} w} dw$ ,

b)  $z \mapsto \int_0^{z^2} \operatorname{sen}(w^2) dw$ , e

c)  $z \mapsto \int_0^{\operatorname{sen} z} e^{w^2} dw$

são funções bem definidas. Calcule as suas derivadas. r:  $e^{\operatorname{sen} z}$ ,  $2z \operatorname{sen}(z^4)$ , e  $\cos z e^{\operatorname{sen}^2 z}$ .

4. Calcule

a)  $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$ ; r:  $2\pi i$ ;

b)  $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$ ; r: 0;

c)  $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$ ; r:  $\frac{2\pi i}{9}$ ;

d)  $\int_{|z|=5} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$ ; r: 0.

5. Calcule

a)  $\int_{|z|=2,5} \frac{1}{z^2+5z+6} dz$ ; r:  $2\pi i$ ;

b)  $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)^n} dz$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; r: 0 se  $n \neq 1$ ,  $2\pi i$  se  $n = 1$ ;

c)  $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^n} dz$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; r: 0 se  $n \leq 0$ ,  $\frac{2\pi i}{(n-1)!} 2^{n-1} e^{-2}$  se  $n > 0$ ;

d)  $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$ ; r:  $-\frac{\pi i}{2}$ ;

e)  $\int_{|z|=3\pi} \frac{\text{sen } z}{z} dz$ ; r: 0.

6. Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  e considere a função  $u(x, y) = x^3 \lambda^3 - 3xy^2 \lambda$ .

(i) Determine para que valores de  $\lambda$  a função  $u$  é harmónica.

Resposta:  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = \pm 1$

(ii) Considere  $\lambda = 1$ . Determine uma função inteira  $f$  tal que  $f(0) = i$  e a parte real de  $f$  é  $u$ .

Resposta:  $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + 1)$

(iii) Calcule o integral

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} dz$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido direto.

Resposta:  $2\pi i$

7. Seja  $f$  uma função inteira que satisfaz  $|f(z)| \leq c(1 + |z|^3)$  para determinado  $c$  em  $\mathbb{R}^+$ . O que pode afirmar quanto a  $f$ ? Sugestão: Prove uma generalização do Teorema de Liouville.

8. Sejam  $a \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ . Suponha  $f$  é inteira e que o seu contradomínio não intersecta a bola aberta de raio  $r$  centrada em  $a$ . Prove que  $f$  é constante.

## VI Séries de Taylor e de Laurent, Teorema dos Resíduos (21-25/10/2019)

1. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto zero, indicando a maior região onde é válido:

- a)  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  para  $|z| < 1$ ;
- b)  $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$  para  $|z| < 1$ ;
- c)  $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$  para  $|z| < 1$ ;
- d)  $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$ ; r:  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$  para  $|z| < 1$ ;
- e)  $z \mapsto \log(1+z)$ ; r:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$  para  $|z| < 1$ ;
- f)  $z \mapsto e^z$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  para todo o  $z$ ;
- g)  $z \mapsto \sin z$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$  para todo o  $z$ ;
- h)  $z \mapsto \cos z^3$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n)!}$  para todo o  $z$ ;
- i)  $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ . r:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$  para todo o  $z \neq 0$ ;

2. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto  $a$ , indicando a maior região onde é válido:

- a)  $z \mapsto \frac{1}{z}$  em torno de  $a$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$  para  $|z-a| < |a|$ ;
- b)  $z \mapsto \frac{1}{z^2}$  em torno de  $a = 1$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n (z-1)^n$  para  $|z-1| < 1$ ;
- c)  $z \mapsto \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$  em torno de  $a = 2$ ;
- d)  $z \mapsto z^3$  em torno de  $a = 1$ ; r:  $(z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1$  para todo o  $z$ ;
- e)  $z \mapsto \frac{e^z}{(z-a)}$  em torno de  $a$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^{n-1}$  para  $|z-a| > 0$ ;
- f)  $z \mapsto \frac{1}{z^2-5z+6}$  em torno de  $a = 1$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-1)^n$  para  $|z-1| < 1$ ;
- g)  $z \mapsto \log(z^2 + 2z + 2)$  em torno de  $a = -1$ ; r:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z+1)^{2n+2}$  para  $|z+1| < 1$ .

3. Calcule

a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{2};$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2};$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} dx = \frac{\pi}{6}.$

d)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$  sugestão: integre ao longo de um contorno que contenha um terço de circunferência de raio  $R$  e dois segmentos de reta, de zero a  $R$  e de zero a  $Re^{i2\pi/3}$ .

4. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent da função  $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ :

a) na região  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ; resposta:  $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-(n+1)} - 1)z^n;$

b) na região  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ ; resposta:  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} + \frac{z^n}{2^{n+1}};$

c) na região  $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$ ; resposta:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}.$

d) Calcule  $\int_{|z|=r} f(z) dz$  para  $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  e  $\frac{5}{2}$ ;  $r: 0, 2\pi i$  e  $0$ .

5. Em que regiões se pode desenvolver em série  $z \mapsto \frac{1}{z^4+4}$  em torno de  $2 + 2i$ ? Resposta: Em 4 regiões,  $|z - (2 + 2i)| < \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2} < |z - (2 + 2i)| < \sqrt{10}$ ,  $\sqrt{10} < |z - (2 + 2i)| < 3\sqrt{2}$  e  $|z - (2 + 2i)| > 3\sqrt{2}$ .

6. Calcule

$$\int_{|z|=1} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz,$$

com a circunferência descrita no sentido direto. Classifique as singularidades da função integrada. Resposta:  $-\frac{\pi i}{3}$ , singularidade essencial em  $0$ .

7. Seja  $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \frac{\log(1-z)}{z^4}$ , onde  $\log$  designa o logaritmo principal.

a) Desenvolva  $f$  em série de Laurent, em torno de  $0$ . R:  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n}.$

b) Calcule  $\int_{\partial\{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < \frac{1}{2}, |\Im z| < 2\}} f(z) dz$ , integrando a série de Laurent e usando a Fórmula Integral de Cauchy. R:  $-\frac{2\pi i}{3}.$

## VIII Esboço de campos de direções (4-8/11/2019)

1. Esboce os campos de direções e os gráficos das soluções das seguintes equações diferenciais:

a)  $y' = y(y^2 - 1)$ ,

b)  $y' = y^2 + 1$ ,

c)  $y' = \cos(y - t)$ ,

d)  $y' = -ty$ ,

e)  $y' = \frac{y+t}{y-t}$ ,

f)  $y' = -\frac{y+t}{y-t}$ ,

g)  $y' = -\frac{4y-6t}{y-3t}$ .

2. Determine as curvas ortogonais às soluções de  $y' = y$  e esboce-as.

Resposta:  $\frac{y^2}{2} = -t + c$ .

3. Considere  $y' = \sqrt{1 - y^2}$ . Esboce o campo de direções e os gráficos das soluções. Determine se as retas  $y = -1$  e  $y = 1$  são assíntotas dos gráficos das soluções ou se as soluções não constantes atingem os valores  $-1$  e  $1$ . Discuta o problema da unicidade de solução. Resposta:  $y = \sin(t + c)$  para  $t \in [-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c]$ . As soluções com condição inicial  $y(t_0) = -1$  ou com condição inicial  $y(t_0) = 1$  não são únicas.

4. Esboce o campo de direções de  $y' = 2\sqrt{y}$ . Determine todas as soluções com  $y(0) = 0$ . Resposta: Seja  $c \in [0, +\infty]$ . Então

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c, \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

é solução do problema.

5. Esboce o campo de direções e os gráficos das soluções da equação diferencial

$$y' = \sin y.$$

Determine as curvas ortogonais aos gráficos das soluções. Resposta:  $\cos y = t + c$ .

## IX Edo's escalares de primeira ordem (11-15/11/2019)

1. Determine a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial  $y(x_0) = y_0$ .

a)  $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ . Resposta:  $y = y_0e^{x^2-x_0^2} + e^{x^2}(x^2 - x_0^2)$ .

b)  $y' - \tan(x)y = \sin x$ , com  $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k$  inteiro). Resposta:  $y \cos x = y_0 \cos x_0 + \frac{1}{2}(\sin^2 x - \sin^2 x_0)$ .

c)  $y' = e^{x+y}$ . Solução:  $y = -\ln(e^{-y_0} - e^x + e^{x_0})$ .

d)  $xyy' + 1 + y^2 = 0$ , com  $x_0y_0 \neq 0$ . Resposta:  $y^2 = (1 + y_0^2)\frac{x_0^2}{x^2} - 1$ .

e)  $(2x^3 + xy^2) + (x^2y + 2y^3)y' = 0$ , com  $y_0 \neq 0$ . Resposta:  $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x_0^4 + x_0^2y_0^2 + y_0^4$ .

f)  $\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$ , com  $y_0 \neq -e^{-x_0}$ . Resposta: o fator integrante é  $e^x$  e a solução  $\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = \frac{y_0^2}{2}e^{x_0} + y_0e^{2x_0}$ .

2. Considere a equação diferencial

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

a) Mostre que tem um fator integrante do tipo  $\mu = \mu(xy)$ .

b) Mostre que a solução com condição inicial  $y(-1) = 1$  é dada implicitamente pela expressão  $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$ .

3. Determine a solução de

$$\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x \ln x$$

que satisfaz  $y(e) = e^2$ . Resposta:  $y(x) = x^2(x \ln x - x + 1)$ .

4. Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$2t + y - yy' = 0.$$

Verifique que  $y - 2t$  é fator integrante. Resolva a equação diferencial. Resposta:  $y^2t - \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}y^3 = c$ .

## X Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (18-22/11/2019)

1. Calcule a solução de  $X' = AX$ , com  $X(0) = X_0$ , e esboce o retrato de fase dos sistemas:

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ . Resposta:  $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{bmatrix} X_0$ .

b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ . Resposta:  $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{4 - e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t} - 4}{3} \\ \frac{1 - e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t} - 1}{3} \end{bmatrix} X_0$ .

2. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- a) Determine a solução que vale  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  em  $t = 0$ .

Resposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 + y_0}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- b) Esboce o retrato de fase do sistema, tendo o cuidado de identificar o comportamento assintótico das soluções quando  $t$  tende para  $+\infty$ .

Resposta:

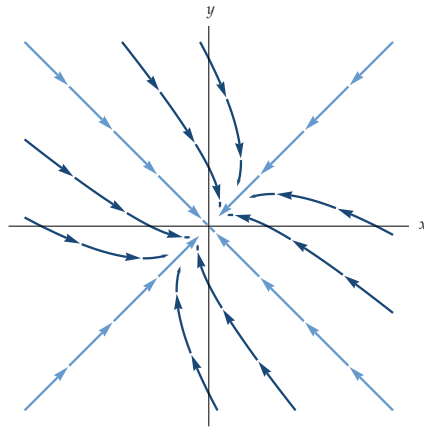


Figura 1: Retrato de fase do sistema (1).

3. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2)$$

a) Determine a solução que vale  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  em  $t = 0$ .

Resposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:

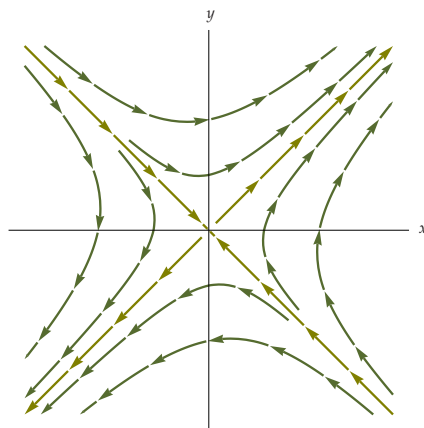


Figura 2: Retrato de fase do sistema (2).



4. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3)$$

a) Determine a solução que vale  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  em  $t = 0$ .

Resposta:

$$X(t) = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0)e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:

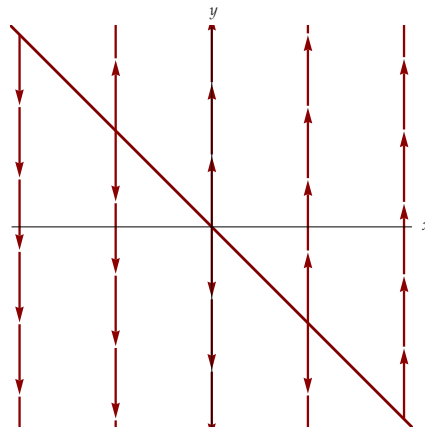


Figura 3: Retrato de fase do sistema (3).

5. Para cada uma das seguintes matrizes determine  $e^{At}$  e esboce o retrato de fase do sistema  $X' = AX$ :

a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ . Resposta:  $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & \text{sen}(4t) \\ -\text{sen}(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$ .

b)  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Resposta:  $e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$ .

c)  $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ . Resposta:  $e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 6t & 6t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$ .

d)  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Resposta:  $e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \text{sen}(2t) & -2 \text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t) & \cos(2t) - \text{sen}(2t) \end{bmatrix}$ .

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{bmatrix}.$$

## XI Edo's escalares de primeira ordem, Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (25-29/11/2019)

1. Considere a equação  $y' = \frac{t^2 - y^2}{2ty}$ , com  $y_0 t_0 \neq 0$ . Seja  $v = \frac{y}{t}$ . Verifique que  $\frac{t^2 - y^2}{2ty} = \frac{1 - v^2}{2v}$  e que  $y' = tv' + v$ . Determine  $v$  e seguidamente  $y$ .

Resposta:  $1 - 3v^2 = \frac{c}{t^3}$  e  $t^3 - 3ty^2 = c$  ( $c = t_0^3 - 3t_0 y_0^2$ ).

2. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que  $a, b, c$  são constantes reais e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

- a) Mostre que a substituição  $v = at + by + c$ , transforma a equação numa equação separável. Resposta:  $\dot{v} = bf(v) + a$ .
- b) Resolva o problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2, \quad y(0) = 1.$$

Resposta:  $y(t) = 1 - 2t - \ln(1 - t)$ .

3. Calcule as duas primeiras iteradas de Picard para  $y' = t^2 + y^2$  com  $y(0) = 0$ .

Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 0, \\ y_1(t) &= \frac{t^3}{3}, \\ y_2(t) &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}. \end{aligned}$$

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \tan y, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Tomando como iterada de Picard de ordem zero  $y_0(t) \equiv \frac{\pi}{4}$ , calcule  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ . Qual o domínio de  $y_2$ ?

Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{\pi}{4}, \\ y_1(t) &= \frac{\pi}{4} + t, \\ y_2(t) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \ln \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + t \right) \right], \quad \text{para } -\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um fator integrante  $\mu = \mu(y)$ .

Resposta:  $\mu(y) = y$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial  $y(1) = 1$ .

Resposta:  $y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$

6. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

a) Calcule  $e^{At}$ . Resposta:  $e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$ .

b) Calcule a solução de  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , com  $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ .

Resposta:  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$ .

c) Em termos de coordenadas polares,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , verifique que o sistema da alínea **b)** pode ser escrito  $r' = r$  e  $\theta' = 1$ , ou seja,  $\frac{dr}{d\theta} = r$ . Resolva para  $r$  em função de  $\theta$ .

Resposta: Substituindo  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  no sistema obtém-se

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = r \cos \theta - r \sin \theta, \\ r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = r \cos \theta + r \sin \theta. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por  $\cos \theta$ , a segunda equação por  $\sin \theta$ , e adicionando os resultados, vem  $r' = r$ . Finalmente, substituindo  $r'$  por  $r$  numa das equações do sistema, conclui-se que  $\theta' = 1$ . Logo,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{r}{1} = r.$$

De  $\frac{dr}{d\theta} = r$  tira-se  $r = r_0 e^{\theta - \theta_0}$ .

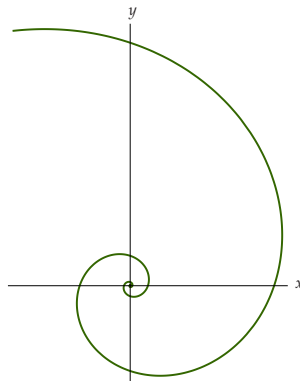


Figura 4: Esboço da curva descrita por  $r = r_0 e^{\theta - \theta_0}$  no plano  $(x, y)$ .

## XII Edo's lineares escalares de ordem superior a um (2-6/12/2019)

1. Determine as soluções de

a)  $y'' - y = 0$ . Resposta:  $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ ;

b)  $y'' - 3y' - 4y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Resposta:  $y = \frac{1}{5}e^{4t} + \frac{4}{5}e^{-t}$ ;

c)  $y'' + y = 0$ . Resposta:  $y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ ;

d)  $y'' - 2y' + 5y = 0$ . Resposta:  $y = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$ ;

e)  $y'' + 2y' + y = 0$ . Resposta:  $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$ .

2. Determine as soluções de

a)  $y'' - 5y' + 6y = e^t$ . Resposta:  $y = \frac{1}{2}e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ ;

b)  $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$ . Resposta:  $y = -te^{2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ ;

c)  $y'' - 5y' + 6y = t + te^t + 1$ .

Resposta:  $y = \frac{11}{36} + \frac{t}{6} + \frac{1}{4}(3 + 2t)e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$  e o aniquilador do 2º membro é  $D^2(D - 1)^2$ ;

d)  $y'' - 5y' + 6y = \sin(t)$ .

Resposta:  $y = \frac{\sin t + \cos t}{10} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$  e o aniquilador do 2º membro é  $D^2 + 1$ ;

e)  $y'' - 5y' + 6y = \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ .

Resposta:  $y = \frac{1}{12} + \frac{5 \sin(2t) - \cos(2t)}{104} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$  e o aniquilador do 2º membro é  $D(D^2 + 4)$ ;

f)  $y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t}$ .

Resposta:  $y = -\frac{1}{25}te^{2t} + \frac{1}{10}t^2 e^{2t} - \frac{7 \sin t + \cos t}{50} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$  e o aniquilador do 2º membro é  $(D^2 + 1)(D - 2)^2$ ;

g)  $y'' - 5y' + 6y = te^{2t} \sin(3t)$ . Resposta: o aniquilador do 2º membro é  $((D - 2)^2 + 9)^2$ .

### XIII Séries de Fourier, equação do calor, equação das ondas, equação de Laplace (19-13/12/2019)

1. Determine a série de Fourier da função  $f$  no intervalo especificado:

a)  $f(x) = x; \quad |x| \leq 1.$

Resposta:  $f(x) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\pi x)}{1} - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2} + \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3} - \dots \right).$

b)  $f(x) = x^2; \quad |x| \leq \pi.$

Resposta: primitivando por partes, obtém-se

$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2}{n} \text{sen}(nx) + \frac{2}{n^2} x \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \text{sen}(nx).$$

Isto conduz a

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[ \frac{\cos(x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \dots \right].$$

2. Seja  $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(s) = \text{sen } s$ . Determine a expansão de  $g$  em série de cossenos. Nota:  $2 \text{sen } s \cos(ns) = \text{sen}((n+1)s) - \text{sen}((n-1)s)$ .

Resposta:

$$\text{sen } s = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2-1} \cos(2s) - \frac{1}{4^2-1} \cos(4s) - \frac{1}{6^2-1} \cos(6s) + \dots \right].$$

3. Determine os valores próprios e as funções próprias do operador  $-D^2$  definido no espaço  $\{y \in C^2[0, l] : y'(0) = 0 \text{ e } y'(l) = 0\}$ .

Resposta: Os valores próprios são  $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ , com  $n \in \mathbb{N}_0$ , as funções próprias correspondentes são  $y_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)$ , com  $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

4. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & \text{para } (x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty[, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 3 \cos(2\pi x) - 5 \cos(4\pi x) & \text{para } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Resposta:  $u(x, t) = 3e^{-9 \cdot 2^2 \cdot \pi^2 t} \cos(2\pi x) - 5e^{-9 \cdot 4^2 \cdot \pi^2 t} \cos(4\pi x).$

5. Determine a solução de

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x, y) \in [0, a] \times [0, b], \\ u(0, y) = 0 & \text{para } y \in [0, b], \\ u(a, y) = 0 & \text{para } y \in [0, b], \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, a], \\ u(x, b) = f(x) & \text{para } x \in [0, a]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

com

$$d_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx.$$

6. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \operatorname{sen} x & \text{para } (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x, t) = (c_1 e^{-t} + t e^{-t}) \operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx).$$

com

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

7. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & \text{para } (x, t) \in [0, 10] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(10, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x) - 7 \operatorname{sen}(4\pi x) & \text{para } x \in [0, 10]. \end{cases}$$

Resposta:  $u(x, t) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x) e^{(1-4\pi^2)t} - 7 \operatorname{sen}(4\pi x) e^{(1-16\pi^2)t}$ .

8. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{para } (x, t) \in [0, \ell] \times [0, +\infty[, \\ u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) & \text{para } x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

no caso



a)  $f(x) = \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right)$  e  $g(x) = \cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$ .

Resposta:  $u(x, t) = \cos\left(\frac{4\pi ct}{\ell}\right) \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{6\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi ct}{\ell}\right) \cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$ .

b)  $f \in C^3, g \in C^2, f'(0) = g'(0) = f'(\ell) = g'(\ell) = 0$ .

## Referências

- [1] **L.V. Ahlfors**. Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.
- [2] **M. Braun**. Differential Equations and their Applications, An Introduction to Applied Mathematics, 4th ed., Springer, 1993.
- [3] **P.M. Girão**. Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais, IST Press, 2014.
- [4] **L.T. Magalhães**. *Análise Complexa em Uma Variável e Aplicações*, IST, Fevereiro de 2004.
- [5] **L.T. Magalhães**. Teoria Elementar de Equações Diferenciais, IST, Junho de 2005.
- [6] **L.V. Pessoa**. *Introdução à Análise Complexa*, IST, Maio de 2008.