Análise Complexa e Equações Diferenciais

Michael Paluch

1 Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados é uma forma mais simples para obter soluções de certo tipos de equações diferencias lineares com coeficientes constantes.

Seja $p(\lambda)$ um polinómio e considere a equação diferencial

$$p(D)y = f(t)e^{\alpha t}, \tag{1}$$

onde $f(t)$ é um polinómio e D é o operador de derivação. Existe um método algébrica que se chama *coeficientes indeterminados* que produz uma solução particular. Se α não é uma raiz do polinómio $p(\lambda)$ procuramos uma solução de forma

$$g(t)e^{\alpha t} \tag{2}$$

onde $g(t)$ é um polinómio do mesmo grau de $f(t)$. Se α é uma raiz de $p(\lambda)$ de multiplicada s, então procuramos uma solução de forma

$$t^s \cdot g(t)e^{\alpha t} \tag{3}$$

onde $g(t)$ é um polinómio do mesmo grau de $f(t)$.

Lema 1.1. *Para $n > 0$ e $G(t)$ uma função de classe $\mathcal{C}^n$ tem-se*

$$D^n\left[G(t)e^{\alpha t}\right] = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} G^{(k)}(t)\alpha^{n-k}\right] e^{\alpha t}$$

Demonstração. Para $n = 1$ tem-se

$$D\left[G(t)e^{\alpha t}\right] = G'(t)e^{\alpha t} + \alpha G(t)e^{\alpha t} = \left[G(t) + G(t)'\alpha\right] e^{\alpha t}$$

Agora vamos supor que $n > 1$ e

$$D^{n-1}\left[G(t)e^{\alpha t}\right] = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t)\alpha^{n-1-k}\right] e^{\alpha t}.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
D^{n}\left[G(t)e^{\alpha t}\right] &= D\left(D^{n-1}\left[G(t)e^{\alpha t}\right]\right) \\
&= D\left(\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t)\alpha^{n-1-k}\right] e^{\alpha t}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k+1)}(t)\alpha^{n-1-k} e^{\alpha t} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t)\alpha^{n-k} e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

sendo $j = k + 1$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} G^{(j)}(t)\alpha^{n-j} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} G^{(k)}(t)\alpha^{n-k}\right] e^{\alpha t} \\
&= \left[G(t)\alpha^{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} + \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!}\right) G^{(j)}(t)\alpha^{n-j}\right. \\
&\qquad \left. + G^{(n)}(t)\right] e^{\alpha t}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} + \frac{(n-1)!}{j!(n-(j+1))!} &= (n-1)! \frac{(j-1)!(n-j)! + j!(n-(j+1))!}{(j-1)!(n-j)!j!(n-(j+1))!} \\
&= (n-1)! \frac{(n-j)! + j(n-(j+1))!}{(n-j)!j!(n-(j+1))!} \\
&= (n-1)! \frac{(n-j) + j}{(n-j)!j!} \\
&= \frac{n!}{(n-j)!j!}
\end{aligned}$$

para $0 < j < n$, segue

$$D^n \left[G(t)e^{\alpha t}\right] = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} G^{(k)}(t)\alpha^{n-k}\right] e^{\alpha t}$$

□

Proposição 1.2. *Para um polinómio $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^n$ de grau $n \geq 0$ e uma função $f(t)$ de classe $\mathcal{C}^n$, tem-se*

$$p(D)\left[f(t)e^{\alpha t}\right] = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t) \cdot p^{(k)}(\alpha)}{k!}\right] e^{\alpha t} \tag{4}$$

Demonstração. Pelo Lema 1.1 temos

$$\begin{aligned}
p(D)\left[f(t)e^{\alpha t}\right] &= \sum_{j=0}^{n} a_j D^j \left[f(t)e^{\alpha t}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \left[\sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{k!(j-k)!} f^{(k)}(t)\alpha^{j-k}\right] e^{\alpha t} \\
&= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \left[\sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{k!(j-k)!}\alpha^{j-k}\right] e^{\alpha t} \\
&= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t) \left[\frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k)!}\alpha^{j-k}\right] e^{\alpha t} \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t) \cdot p^{(k)}(\alpha)}{k!}\right] e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3. Determine a solução geral de

$$y'' + y = t\cos(2t). \tag{5}$$

Considere a equação

$$y'' + y = te^{i2t}. \tag{6}$$

A parte real de te^{i2t} é $t\cos 2t$ e os coeficientes da equação são reais, segue que a parte real de cada solução de (6) é uma solução de (5). Cada solução de (6) é uma solução da equação homogénea

$$(D - i2)^2(D - i)(D + i)(y) = 0. \tag{7}$$

Segue que a solução de (5) e da forma $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + y_p$, com y_p igual à parte real de uma função de forma $(At + B)e^{i2t}$. Aplicando (4) ao polinómio $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ e obtemos

$$\begin{aligned} p(D)[(At + B) \cdot e^{i2t}] &= [((i2)^2 + 1)(At + B) + (2(i2))A]e^{i2t} \\ &= [-3(At + B) + i4 \cdot A]e^{i2t} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} -3(At + B) + 4iA &= t \\ A &= -1/3 \\ B &= -4i/9, \end{aligned}$$

Para $y_p = \mathsf{Re}\left[\left(-\frac{t}{3} - \frac{4i}{9}\right) e^{i2t}\right]$ obtemos a solução geral de (5)

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{t}{3}\cos(2t) + \frac{4}{9}\operatorname{sen}(2t).$$

Exemplo 1.4. Determine a solução geral de

$$y'' + y = t^2 \operatorname{sen}(t). \tag{8}$$

Considere a equação

$$y'' + y = (D^2 + 1)(y) = t^2 e^{it}. \tag{9}$$

A aniquilador de t^2e^{it} é $(D - i)^3$. A parte imaginária de t^2e^{it} é $t^2\cos(t)$ e os coeficientes da equação são reais, segue que a parte imaginária de cada solução de (9) é uma solução de (8). Como i é uma raiz de ordem 1 do polinóno $\lambda^2 + 1$, segue que a solução de (8) é da forma $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + y_p$, com y_p a parte imaginária de uma função $t \cdot (At^2 + Bt + C)e^{it}$.

Aplicando (4) com $f(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$ obtemos

$$\begin{aligned}
(D^2+1)[f(t)e^{it}] &= [2i(3At^2+2Bt+C)+6At+2B]e^{it} \\
2i(3At^2+2Bt+C)+6At+2B &= t^2 \\
A &= -i/6 \\
B &= 1/4 \\
C &= i/4.
\end{aligned}$$

Para $y_p = \operatorname{Im}\left[\left(-\frac{t^3}{6}i + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4}i\right)e^{it}\right]$ obtemos a solução geral de (8)

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \left(-\frac{t^3}{6} + \frac{t}{4}\right)\cos(t) + \frac{t}{4}\operatorname{sen}(t).$$