

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre de 2019/2020

MEAer

Exercícios para as aulas práticas

Conteúdo

I	Números complexos (16-20/9/2019)	1
II	Números complexos, funções complexas (23-27/9/2019)	4
III	Transformações conformes e diferenciabilidade de funções complexas (30/9 – 4/10/2019)	6
IV	Diferenciabilidade de funções complexas em coordenadas polares, séries de potências complexas, exponencial, logaritmo (7-11/10/2019)	7
V	Integrais de Funções Complexas, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy (14-18/10/2019)	9
VI	Séries de Taylor e de Laurent, Teorema dos Resíduos (21-25/10/2019)	11
VIII	Esboço de campos de direções (4-8/11/2019)	13
IX	Edo's escalares de primeira ordem (11-15/11/2019)	14
X	Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (18-22/11/2019)	15
XI	Edo's escalares de primeira ordem, Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (25-29/11/2019)	19
XII	Edo's lineares escalares de ordem superior a um (2-6/12/2019)	22
XIII	Séries de Fourier, equação do calor, equação das ondas, equação de Laplace (19-13/12/2019)	23

I Números complexos (16-20/9/2019)

1. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica e represente-os no plano de Argand:

a) $(2 + i)(1 - i) = 3 - i$,

b) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$,

c) $\frac{2+i}{1+i} = \frac{3-i}{2}$,

d) $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i,$

e) $(1 - 2i)^3 = -11 + 2i,$

f) $i^{81} = i.$

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os no plano de Argand:

a) $3 = 3E(i0),$

b) $-2 = 2E(i\pi),$

c) $1 + i = \sqrt{2}E(i\frac{\pi}{4}),$

d) $3 - 4i = 5E(-i \arctan \frac{4}{3}),$

e) $-1 - i = \sqrt{2}E(i\frac{5\pi}{4}).$

3. Verifique as seguintes propriedades do conjugado:

a) $\overline{\overline{z}} = z.$

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},$

c) $\overline{z\overline{w}} = \overline{z} w,$

d) $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$

4. Verifique as seguintes propriedades do módulo:

a) $|\overline{z}| = |z|.$

b) $|zw| = |z| |w|,$

c) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|},$

d) $|z + w| \leq |z| + |w|,$

e) $|z - w| \geq ||z| - |w||.$

5. Calcule as raízes cúbicas de $-8i$ e assinale-as no plano complexo.

Resposta: $2E(-i\frac{\pi}{6}), 2E(i\frac{\pi}{2}), 2E(i\frac{7\pi}{6}).$

6. Determine para que valores de θ , pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi]$, se tem

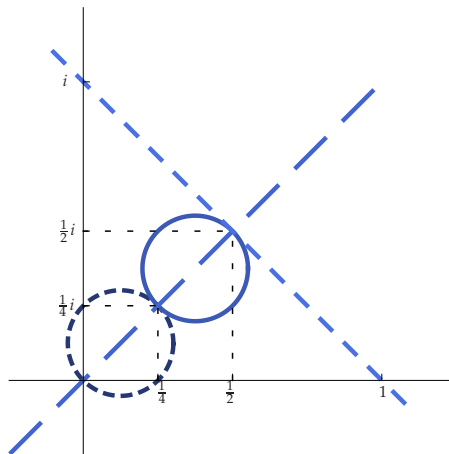
$$|1 + E(i\theta)| = \sqrt{2}.$$

Resposta: $\pm \frac{\pi}{2}.$

7. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero. Sugestão: Comece por reduzir ao caso em que $z_1 = 1$; verifique que então z_2 e z_3 são conjugados; logo $z_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_3 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
8. Determine as soluções das seguintes equações:
- (i) $(1 - z)^6 = (1 + z)^6$. Resposta: $0, \pm i\sqrt{3}, \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$.
 - (ii) $1 - z + z^2 = 0$. Resposta: $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
 - (iii) $z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$. Resposta: $\pm 1, E(\pm i\frac{\pi}{4}), E(\pm i\frac{3\pi}{4})$.
 - (iv) $1 + z + z^2 + \dots + z^7 = 0$. Resposta: $-1, \pm i, E(\pm i\frac{\pi}{4}), E(\pm i\frac{3\pi}{4})$.

II Números complexos, funções complexas (23-27/9/2019)

- Calcule e represente no plano de Argand:
 - $\sqrt[3]{i}$. Resposta: $E(i\frac{\pi}{6}), E(i\frac{5\pi}{6}), E(i\frac{3\pi}{2})$.
 - $\sqrt[4]{-1}$. Resposta: $E(i\frac{\pi}{4}), E(i\frac{3\pi}{4}), E(i\frac{5\pi}{4}), E(i\frac{7\pi}{4})$.
 - $\sqrt{1-i}$. Resposta: $\sqrt[4]{2}E(-i\frac{\pi}{8}), \sqrt[4]{2}E(i\frac{7\pi}{8})$.
- Verifique se $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.
- Determine a equação da reta que passa por -1 e i . Resposta: $(-1+i)\bar{z} + (-1-i)z - 2 = 0$.
 - Determine a equação da circunferência que tem centro em -1 e passa por i . Resposta: $|z+1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} - 1 = 0$.
 - Determine dois pontos da reta $(1-2i)z + (1+2i)\bar{z} - 2 = 0$. Resposta: 1 e $\frac{i}{2}$.
 - Determine o centro e o raio da circunferência $|z|^2 - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + 1 = 0$. Resposta: $1+i$ e 1 .
- Represente a imagem das duas retas e das duas circunferências por $z \mapsto \frac{1}{z}$:



- Calcule as imagens das regiões R pelas funções f :
 - $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \pi/4 < \arg z < \pi/2\}, f(z) = z^3$.

b) $R = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 2\}$, $f(re(i\theta)) = \sqrt[3]{r}E(i\theta/3)$ com $-\pi < \theta \leq \pi$.

c) $R = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z+1}$.

Resposta: $\{z \in \mathbf{C} : \Re z > \frac{1}{2}\}$

d) $R = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{z-1}{iz+1}$.

Resposta: $\{z \in \mathbf{C} : \Im(1-i)z > 0\}$.

e) $R = \{z \in \mathbf{C} : 1 < \Re z < 2, 0 < \Im z < 1, |z-2| > 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

Resposta: $\{z \in \mathbf{C} : 0 < \Re z < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

f) $R = \{z \in \mathbf{C} : \Re z > 1, \Im z < 0\}$, $f(z) = \frac{1}{z+i}$.

Resposta: $\{z \in \mathbf{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$

6. Sejam a e b números complexos. Prove usando complexos que

$$\Re \left(\frac{z-a}{z-b} \right) = 0$$

representa a equação de uma circunferência com diâmetro de extremidades em a e b .

III Transformações conformes e diferenciabilidade de funções complexas (30/9 – 4/10/2019)

1. Calcule as imagens das regiões R pelas funções f :

a) $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ (transformação conforme de um semiplano num disco).

b) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z > 0\}$, $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ (transformação conforme de um semidisco num semiplano).

c) $R = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i0 \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1]\}$, $f(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ (transformação conforme do complemento de um segmento de reta num semiplano).

2. Estude a diferenciabilidade de $x + iy \mapsto e^x E(iy)$.

Resposta: A função é diferenciável em qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e com derivada igual à função.

3. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + \cos y).$$

Resposta: f é diferenciável quando $y = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, $f'(z) = 2z$.

4. Estude a diferenciabilidade das funções $z \mapsto \bar{z}^2$, $z \mapsto z^2 \bar{z}$ e $z \mapsto |z| \bar{z}$.

Resposta: Qualquer das funções é diferenciável apenas em $z = 0$ e com derivada nula.

5. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(x + iy) = \frac{1}{3}(x + 1)^3 + y^2 + iy.$$

Resposta: $f'(-2, 0) = 1$ e $f'(0, 0) = 1$.

6. Determine o conjunto dos pontos onde a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(x + iy) = -(x + 1)E(iy) + i(x - 1)E(-iy),$$

é diferenciável.

Resposta: f é diferenciável quando $x = 0$ ou quando $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

IV Diferenciabilidade de funções complexas em coordenadas polares, séries de potências complexas, exponencial, logaritmo (7-11/10/2019)

1. Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, prove a diferenciabilidade e calcule a derivada de

a) $z \mapsto 1/z^n$ com $n \in \mathbb{N}_1$;

b) $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ onde $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$ com $-\pi < \theta \leq \pi$, onde $n \in \mathbb{N}$.
Esta função é diferenciável no eixo real negativo? E em zero?

2. Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada da função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^2 + i\theta$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e por $f(0) = 0$.

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = (r \ln r - r^2)e^{i\theta}.$$

a) Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada de f .

b) Determine se f pode ser prolongada por continuidade à origem. Em caso afirmativo, estude a diferenciabilidade do prolongamento na origem.

4. Determine o raio de convergência de

a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, Resposta: $R = 1$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, Resposta: $R = 1$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n$, Resposta: $R = e^{-1}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, Resposta: $R = 0$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n}z^n$, Resposta: $R = 4$,

f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(-1)^n z^n$, Resposta: $R = 0$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n$, Resposta: $R = 1/2$.

5. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1, 0 < \Im z < \pi\}$ por $z \mapsto e^z$.

6. Obtenha o desenvolvimento em série de potências de $\sin z$.

7. Estude a diferenciabilidade de $z \mapsto \log z$, onde

$$\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \quad \text{com } -\pi < \theta \leq \pi$$

é o logaritmo principal.

8. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0, |z| > 1\}$ por $z \mapsto \log z$ onde \log designa o logaritmo principal.

9. Calcule

a) $\log(-i)$, Resposta: $-i\pi/2$,

b) $\log(1-i)$, Resposta: $\ln 2/2 - i\pi/4$,

c) $\log(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, Resposta: $i\pi/3$,

d) i^i . Resposta: $e^{-\pi/2}$,

10. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z \in \mathbb{C}$):

a) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$,

b) $\cos(iz) = \cosh(z)$,

c) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$,

d) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$.

e) $\operatorname{sen}\left(-i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)\right) = z$.

11. Mostre que a função $\operatorname{sen} z$ é ilimitada em qualquer reta não paralela ao eixo real.

12. Resolva as seguintes equações:

a) $e^z = -1$, Resposta: $z = i(2k+1)\pi$,

b) $\log(i-z) = 1$, Resposta: $z = -e + i$,

c) $\operatorname{sen} z - \cos z = i$, Resposta: $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ ou
 $z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

V Integrais de Funções Complexas, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy (14-18/10/2019)

1. Calcule usando a definição

a) $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ onde γ é o segmento de reta que une 1 a $2 + 3i$. r: $6 + 3i$.

b) $\int_{\gamma} z^2 dz$, onde γ é o arco de circunferência que une 3 a $1 - 2i$ e que passa por $1 + 2i$. r: $\frac{(1-2i)^3}{3} - \frac{3^3}{3}$.

c) $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ onde γ é o troço de parábola $\{x + iy \in \mathbb{C} : y = x^2\}$ com início em 0 e fim em $1 + i$. r: $1 + \frac{i}{3}$.

d) $\int_{|z|=r} \arg z |dz|$, onde $\arg z$ designa o argumento principal. r: 0.

2. Calcule ao longo de uma curva no primeiro quadrante:

a) $\int_2^{1+i} z dz$; r: $-2 + i$

b) $\int_1^i (1 + \sqrt{z}) dz$, onde \sqrt{z} designa a raiz principal; r: $i - 1 + \frac{2}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - 1 \right)$;

c) $\int_0^{1+i\pi/2} e^{2z} dz$; r: $-\frac{1+e^2}{2}$

d) $\int_1^i \frac{1}{z} dz$; r: $\frac{i\pi}{2}$.

3. Justifique que

a) $z \mapsto \int_0^z e^{\operatorname{sen} w} dw$,

b) $z \mapsto \int_0^{z^2} \operatorname{sen}(w^2) dw$, e

c) $z \mapsto \int_0^{\operatorname{sen} z} e^{w^2} dw$

são funções bem definidas. Calcule as suas derivadas. r: $e^{\operatorname{sen} z}$, $2z \operatorname{sen}(z^4)$, e $\cos z e^{\operatorname{sen}^2 z}$.

4. Calcule

a) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$; r: $2\pi i$;

b) $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$; r: 0;

c) $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$; r: $\frac{2\pi i}{9}$;

d) $\int_{|z|=5} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$; r: 0.

5. Calcule

a) $\int_{|z|=2.5} \frac{1}{z^2+5z+6} dz$; r: $2\pi i$;

b) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)^n} dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \neq -1$, $2\pi i$ se $n = 1$;

c) $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^n} dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \leq 0$, $\frac{2\pi i}{(n-1)!} 2^{n-1} e^{-2}$ se $n > 0$;

d) $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$; r: $-\frac{\pi i}{2}$;

e) $\int_{|z|=3\pi} \frac{\text{sen } z}{z} dz$; r: 0.

6. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função $u(x, y) = x^3 \lambda^3 - 3xy^2 \lambda$.

(i) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.

Resposta: $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$

(ii) Considere $\lambda = 1$. Determine uma função inteira f tal que $f(0) = i$ e a parte real de f é u .

Resposta: $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + 1)$

(iii) Calcule o integral

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} dz$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido direto.

Resposta: $2\pi i$

7. Seja f uma função inteira que satisfaz $|f(z)| \leq c(1 + |z|^3)$ para determinado c em \mathbb{R}^+ . O que pode afirmar quanto a f ? Sugestão: Prove uma generalização do Teorema de Liouville.

8. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Suponha f é inteira e que o seu contradomínio não intersecta a bola aberta de raio r centrada em a . Prove que f é constante.

VI Séries de Taylor e de Laurent, Teorema dos Resíduos (21-25/10/2019)

1. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto zero, indicando a maior região onde é válido:

- a) $z \mapsto \frac{1}{1-z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z| < 1$;
- b) $z \mapsto \frac{1}{1+z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ para $|z| < 1$;
- c) $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ para $|z| < 1$;
- d) $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ para $|z| < 1$;
- e) $z \mapsto \log(1+z)$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ para $|z| < 1$;
- f) $z \mapsto e^z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ para todo o z ;
- g) $z \mapsto \operatorname{sen} z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo o z ;
- h) $z \mapsto \cos z^3$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n)!}$ para todo o z ;
- i) $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$. r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ para todo o $z \neq 0$;

2. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto a , indicando a maior região onde é válido:

- a) $z \mapsto \frac{1}{z}$ em torno de a ; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$ para $|z-a| < |a|$;
- b) $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n (z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;
- c) $z \mapsto \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$ em torno de $a = 2$;
- d) $z \mapsto z^3$ em torno de $a = 1$; r: $(z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1$ para todo o z ;
- e) $z \mapsto \frac{e^z}{(z-a)}$ em torno de a ; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^{n-1}$ para $|z-a| > 0$;
- f) $z \mapsto \frac{1}{z^2-5z+6}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;
- g) $z \mapsto \log(z^2 + 2z + 2)$ em torno de $a = -1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z+1)^{2n+2}$ para $|z+1| < 1$.

3. Calcule

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{2};$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2};$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} dx = \frac{\pi}{6}.$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$ sugestão: integre ao longo de um contorno que contenha um terço de circunferência de raio R e dois segmentos de reta, de zero a R e de zero a $Re^{i2\pi/3}$.

4. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent da função $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$:

a) na região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-(n+1)} - 1)z^n;$

b) na região $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} + \frac{z^n}{2^{n+1}};$

c) na região $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}.$

d) Calcule $\int_{|z|=r} f(z) dz$ para $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$; $r: 0, 2\pi i$ e 0 .

5. Em que regiões se pode desenvolver em série $z \mapsto \frac{1}{z^4+4}$ em torno de $2 + 2i$? Resposta: Em 4 regiões, $|z - (2 + 2i)| < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < |z - (2 + 2i)| < \sqrt{10}$, $\sqrt{10} < |z - (2 + 2i)| < 3\sqrt{2}$ e $|z - (2 + 2i)| > 3\sqrt{2}$.

6. Calcule

$$\int_{|z|=1} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz,$$

com a circunferência descrita no sentido direto. Classifique as singularidades da função integrada. Resposta: $-\frac{\pi i}{3}$, singularidade essencial em 0 .

7. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{\log(1-z)}{z^4}$, onde \log designa o logaritmo principal.

a) Desenvolva f em série de Laurent, em torno de 0 . R: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n}.$

b) Calcule $\int_{\partial\{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < \frac{1}{2}, |\Im z| < 2\}} f(z) dz$, integrando a série de Laurent e usando a Fórmula Integral de Cauchy. R: $-\frac{2\pi i}{3}.$

VIII Esboço de campos de direções (4-8/11/2019)

1. Esboce os campos de direções e os gráficos das soluções das seguintes equações diferenciais:

a) $y' = y(y^2 - 1)$,

b) $y' = y^2 + 1$,

c) $y' = \cos(y - t)$,

d) $y' = -ty$,

e) $y' = \frac{y+t}{y-t}$,

f) $y' = -\frac{y+t}{y-t}$,

g) $y' = -\frac{4y-6t}{y-3t}$.

2. Determine as curvas ortogonais às soluções de $y' = y$ e esboce-as.

Resposta: $\frac{y^2}{2} = -t + c$.

3. Considere $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Esboce o campo de direções e os gráficos das soluções. Determine se as retas $y = -1$ e $y = 1$ são assíntotas dos gráficos das soluções ou se as soluções não constantes atingem os valores -1 e 1 . Discuta o problema da unicidade de solução. Resposta: $y = \sin(t + c)$ para $t \in [-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c]$. As soluções com condição inicial $y(t_0) = -1$ ou com condição inicial $y(t_0) = 1$ não são únicas.

4. Esboce o campo de direções de $y' = 2\sqrt{y}$. Determine todas as soluções com $y(0) = 0$. Resposta: Seja $c \in [0, +\infty]$. Então

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c, \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

é solução do problema.

5. Esboce o campo de direções e os gráficos das soluções da equação diferencial

$$y' = \sin y.$$

Determine as curvas ortogonais aos gráficos das soluções. Resposta: $\cos y = t + c$.

IX Edo's escalares de primeira ordem (11-15/11/2019)

1. Determine a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.

a) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. Resposta: $y = y_0e^{x^2-x_0^2} + e^{x^2}(x^2 - x_0^2)$.

b) $y' - \tan(x)y = \sin x$, com $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro). Resposta: $y \cos x = y_0 \cos x_0 + \frac{1}{2}(\sin^2 x - \sin^2 x_0)$.

c) $y' = e^{x+y}$. Solução: $y = -\ln(e^{-y_0} - e^x + e^{x_0})$.

d) $xyy' + 1 + y^2 = 0$, com $x_0y_0 \neq 0$. Resposta: $y^2 = (1 + y_0^2)\frac{x_0^2}{x^2} - 1$.

e) $(2x^3 + xy^2) + (x^2y + 2y^3)y' = 0$, com $y_0 \neq 0$. Resposta: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x_0^4 + x_0^2y_0^2 + y_0^4$.

f) $\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$, com $y_0 \neq -e^{-x_0}$. Resposta: o fator integrante é e^x e a solução $\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = \frac{y_0^2}{2}e^{x_0} + y_0e^{2x_0}$.

2. Considere a equação diferencial

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

a) Mostre que tem um fator integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

3. Determine a solução de

$$\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x \ln x$$

que satisfaz $y(e) = e^2$. Resposta: $y(x) = x^2(x \ln x - x + 1)$.

4. Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$2t + y - yy' = 0.$$

Verifique que $y - 2t$ é fator integrante. Resolva a equação diferencial. Resposta: $y^2t - \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}y^3 = c$.

X Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (18-22/11/2019)

1. Calcule a solução de $X' = AX$, com $X(0) = X_0$, e esboce o retrato de fase dos sistemas:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{bmatrix} X_0$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Resposta: $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{4 - e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t} - 4}{3} \\ \frac{1 - e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t} - 1}{3} \end{bmatrix} X_0$.

2. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 + y_0}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- b) Esboce o retrato de fase do sistema, tendo o cuidado de identificar o comportamento assintótico das soluções quando t tende para $+\infty$.

Resposta:

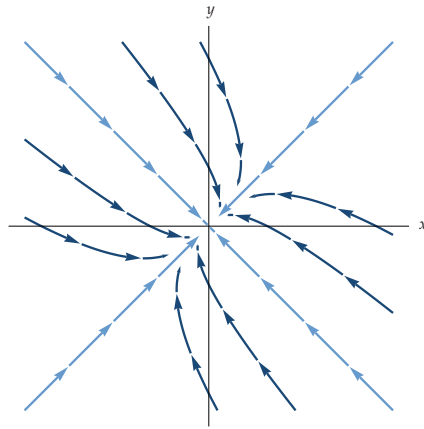


Figura 1: Retrato de fase do sistema (1).

3. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2)$$

a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:

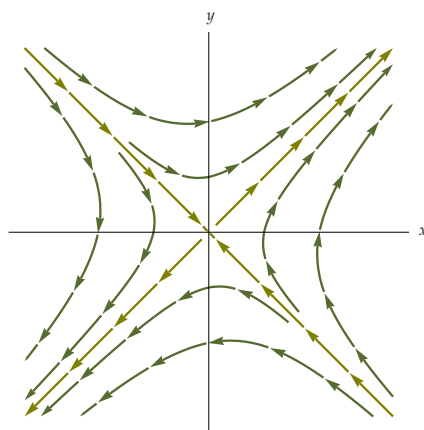


Figura 2: Retrato de fase do sistema (2).

4. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3)$$

a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

Resposta:

$$X(t) = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0)e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:

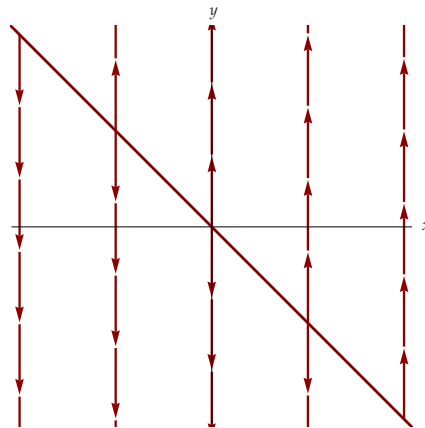


Figura 3: Retrato de fase do sistema (3).

5. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At} e esboce o retrato de fase do sistema $X' = AX$:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & \text{sen}(4t) \\ -\text{sen}(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 6t & 6t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \text{sen}(2t) & -2 \text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t) & \cos(2t) - \text{sen}(2t) \end{bmatrix}$.

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{bmatrix}.$$

XI Edo's escalares de primeira ordem, Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes (25-29/11/2019)

1. Considere a equação $y' = \frac{t^2 - y^2}{2ty}$, com $y_0 t_0 \neq 0$. Seja $v = \frac{y}{t}$. Verifique que $\frac{t^2 - y^2}{2ty} = \frac{1 - v^2}{2v}$ e que $y' = tv' + v$. Determine v e seguidamente y .

Resposta: $1 - 3v^2 = \frac{c}{t^3}$ e $t^3 - 3ty^2 = c$ ($c = t_0^3 - 3t_0 y_0^2$).

2. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que a, b, c são constantes reais e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

- a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável. Resposta: $\dot{v} = bf(v) + a$.
- b) Resolva o problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2, \quad y(0) = 1.$$

Resposta: $y(t) = 1 - 2t - \ln(1 - t)$.

3. Calcule as duas primeiras iteradas de Picard para $y' = t^2 + y^2$ com $y(0) = 0$.

Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 0, \\ y_1(t) &= \frac{t^3}{3}, \\ y_2(t) &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}. \end{aligned}$$

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \tan y, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Tomando como iterada de Picard de ordem zero $y_0(t) \equiv \frac{\pi}{4}$, calcule $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Qual o domínio de y_2 ?

Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{\pi}{4}, \\ y_1(t) &= \frac{\pi}{4} + t, \\ y_2(t) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \ln \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + t \right) \right], \quad \text{para } -\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um fator integrante $\mu = \mu(y)$.

Resposta: $\mu(y) = y$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

Resposta: $y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule e^{At} . Resposta: $e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$.

b) Calcule a solução de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

Resposta: $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t \\ x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$.

c) Em termos de coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, verifique que o sistema da alínea **b)** pode ser escrito $r' = r$ e $\theta' = 1$, ou seja, $\frac{dr}{d\theta} = r$. Resolva para r em função de θ .

Resposta: Substituindo $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$ no sistema obtém-se

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \theta' = r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta, \\ r' \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \theta' = r \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por $\cos \theta$, a segunda equação por $\sin \theta$, e adicionando os resultados, vem $r' = r$. Finalmente, substituindo r' por r numa das equações do sistema, conclui-se que $\theta' = 1$. Logo,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{r}{1} = r.$$

De $\frac{dr}{d\theta} = r$ tira-se $r = r_0 e^{\theta - \theta_0}$.

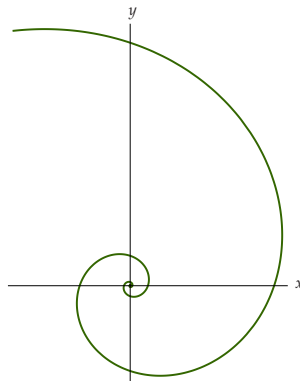


Figura 4: Esboço da curva descrita por $r = r_0 e^{\theta - \theta_0}$ no plano (x, y) .

XII Edo's lineares escalares de ordem superior a um (2-6/12/2019)

1. Determine as soluções de

a) $y'' - y = 0$. Resposta: $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$;

b) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Resposta: $y = \frac{1}{5}e^{4t} + \frac{4}{5}e^{-t}$;

c) $y'' + y = 0$. Resposta: $y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$;

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$. Resposta: $y = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$;

e) $y'' + 2y' + y = 0$. Resposta: $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$.

2. Determine as soluções de

a) $y'' - 5y' + 6y = e^t$. Resposta: $y = \frac{1}{2}e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$;

b) $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$. Resposta: $y = -te^{2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$;

c) $y'' - 5y' + 6y = t + te^t + 1$.

Resposta: $y = \frac{11}{36} + \frac{t}{6} + \frac{1}{4}(3 + 2t)e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2(D - 1)^2$;

d) $y'' - 5y' + 6y = \sin(t)$.

Resposta: $y = \frac{\sin t + \cos t}{10} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2 + 1$;

e) $y'' - 5y' + 6y = \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.

Resposta: $y = \frac{1}{12} + \frac{5 \sin(2t) - \cos(2t)}{104} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D(D^2 + 4)$;

f) $y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t}$.

Resposta: $y = -\frac{1}{25}te^{2t} + \frac{1}{10}t^2 e^{2t} - \frac{7 \sin t + \cos t}{50} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $(D^2 + 1)(D - 2)^2$;

g) $y'' - 5y' + 6y = te^{2t} \sin(3t)$. Resposta: o aniquilador do 2º membro é $((D - 2)^2 + 9)^2$.

XIII Séries de Fourier, equação do calor, equação das ondas, equação de Laplace (19-13/12/2019)

1. Determine a série de Fourier da função f no intervalo especificado:

a) $f(x) = x; \quad |x| \leq 1.$

Resposta: $f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{1} - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2} + \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3} - \dots \right).$

b) $f(x) = x^2; \quad |x| \leq \pi.$

Resposta: primitivando por partes, obtém-se

$$\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{x^2}{n} \text{sen}(nx) + \frac{2}{n^2} x \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \text{sen}(nx).$$

Isto conduz a

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos(x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \dots \right].$$

2. Seja $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(s) = \text{sen } s$. Determine a expansão de g em série de cossenos. Nota: $2 \text{sen } s \cos(ns) = \text{sen}((n+1)s) - \text{sen}((n-1)s)$.

Resposta:

$$\text{sen } s = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2-1} \cos(2s) - \frac{1}{4^2-1} \cos(4s) - \frac{1}{6^2-1} \cos(6s) + \dots \right].$$

3. Determine os valores próprios e as funções próprias do operador $-D^2$ definido no espaço $\{y \in C^2[0, l] : y'(0) = 0 \text{ e } y'(l) = 0\}$.

Resposta: Os valores próprios são $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$, com $n \in \mathbb{N}_0$, as funções próprias correspondentes são $y_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)$, com $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & \text{para } (x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty[, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 3 \cos(2\pi x) - 5 \cos(4\pi x) & \text{para } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Resposta: $u(x, t) = 3e^{-9 \cdot 2^2 \cdot \pi^2 t} \cos(2\pi x) - 5e^{-9 \cdot 4^2 \cdot \pi^2 t} \cos(4\pi x).$

5. Determine a solução de

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x, y) \in [0, a] \times [0, b], \\ u(0, y) = 0 & \text{para } y \in [0, b], \\ u(a, y) = 0 & \text{para } y \in [0, b], \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, a], \\ u(x, b) = f(x) & \text{para } x \in [0, a]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

com

$$d_n = \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx.$$

6. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \operatorname{sen} x & \text{para } (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x, t) = (c_1 e^{-t} + t e^{-t}) \operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx).$$

com

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

7. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & \text{para } (x, t) \in [0, 10] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(10, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x) - 7 \operatorname{sen}(4\pi x) & \text{para } x \in [0, 10]. \end{cases}$$

Resposta: $u(x, t) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x) e^{(1-4\pi^2)t} - 7 \operatorname{sen}(4\pi x) e^{(1-16\pi^2)t}$.

8. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{para } (x, t) \in [0, \ell] \times [0, +\infty[, \\ u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0 & \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) & \text{para } x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

no caso

a) $f(x) = \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right)$ e $g(x) = \cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$.

Resposta: $u(x, t) = \cos\left(\frac{4\pi ct}{\ell}\right) \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{6\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi ct}{\ell}\right) \cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$.

b) $f \in C^3, g \in C^2, f'(0) = g'(0) = f'(\ell) = g'(\ell) = 0$.

Referências

- [1] **L.V. Ahlfors**. Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.
- [2] **M. Braun**. Differential Equations and their Applications, An Introduction to Applied Mathematics, 4th ed., Springer, 1993.
- [3] **P.M. Girão**. Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais, IST Press, 2014.
- [4] **L.T. Magalhães**. *Análise Complexa em Uma Variável e Aplicações*, IST, Fevereiro de 2004.
- [5] **L.T. Magalhães**. Teoria Elementar de Equações Diferenciais, IST, Junho de 2005.
- [6] **L.V. Pessoa**. *Introdução à Análise Complexa*, IST, Maio de 2008.