

Matemática Experimental
Teste de recuperação — Parte II

7 de Janeiro de 2004

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Para $n = 1$ é válida a igualdade $\frac{F_2}{F_1} = 1 = [1]$. Seja $n \geq 1$ e admitamos que $\frac{F_{n+1}}{F_n} = [1; 1, \dots, 1]$. Como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, obtém-se para o quociente

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

Ora, é fácil de ver que $F_n/F_{n+1} = [0; 1, 1, \dots, 1]$, logo

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = [1; 1, \dots, 1] \text{ (} n + 1 \text{ elementos).}$$

Por conseguinte a igualdade dada é válida para qualquer número natural.

1 b) Sabe-se que os quocientes $q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, $n = 1, 2, \dots$ são aproximações racionais do número de ouro Φ , e que o limite da sucessão (q_n) é Φ . Atendendo à igualdade dada na alínea anterior os convergentes, que aqui designamos por $l_1 = [1] = F_2/F_1$, $l_2 = [1; 1] = F_3/F_2, \dots$ os quais, atendendo a uma propriedade estudada da convergência monótona dos convergentes, satisfazem as desigualdades

$$|\Phi - l_1| > |\Phi - l_2| > |\Phi - l_3| > \dots$$

Assim, a intrusão seguinte produz uma lista nas condições pretendidas:

$$Table[Fibonacci[n + 1]/Fibonacci[n], \{n, 30\}]$$

2. Sendo $a, b > 0$ e $2a + b \equiv 0 \pmod{7}$, ou equivalentemente $2a \equiv -b \pmod{7}$, resulta $100a \equiv -50b \pmod{7}$. Mas, $50 \equiv 1 \pmod{7}$, logo $50b \equiv b \pmod{7}$. Assim,

$$100a \equiv -b \pmod{7}, \quad \text{e} \quad 100a + b \equiv 0 \pmod{7},$$

ou seja, $7 \mid (100a + b)$.

3 a) Como $8532 - 2358 = 6174$ e $K(6174) = 6174$ (i.e. o número 6174 é ponto fixo da função de Kaprekar), a constante em causa é o número 6174.

3 b)

```
Kaprekar[n_Integer] := (digitos = IntegerDigits[n];
If[Length[digitos] < 4, PadLeft[digitos, 4]];
a = Sort[digitos, Greater];
b = Sort[a];
FromDigits[a] - FromDigits[b])
```

3 c)

```
palindromo[k_Integer /; k ≥ 10] := (i = 10;
listapalindromo = { };
While[i ≤ k,
digitos = IntegerDigits[i];
If[digitos == Reverse[digitos], AppendTo[listapalindromo, i]];
i + +];
listapalindromo)
```

4 a)

```
bis[f_, a_, b_, ε_] := (δ = b - a; A = a; B = b;
While[δ/2 ≥ ε, (* erro iterada x1 ≤ δ/2 *)
x1 = (A + B)/2.;
fx1 = f[x1];
If[fx1 == 0., Return[Print["z = ", x1]]];
If[fx1 * f[A] < 0, B = x1, A = x1];
δ = δ/2];
x1)
```

4 b)

```
valorProprio[A_, a_, b_, ε_] :=
(n = Dimensions[A][[1]];
bis[Det[A - λ IdentityMatrix[n]], a, b, ε])
```

Os valores próprios da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. A função $g(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)$ é continua e muda de sinal no intervalo $[3/2, 5/2]$, de comprimento unitário. A solução (exacta) $x_1 = 2$ será obtida efectuando uma iteração do método da bissecção.

5 a) A equação $2x(1 - x) = x \Leftrightarrow x(1 - 2x) = 0$ possui dois pontos fixos $z_1 = 0$ e $z_2 = 1/2$.

5 b) Para $g(x) = 2x(1 - x)$ obtém-se: $x_1 = g(0.6) = 2 \times 0.6 \times (0.4) = 0.48$ e $x_2 = g(0.48) = 0.4992$.