Matemática Experimental
Teste de recuperação — Parte II

4 de Janeiro de 2005

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) O período é 4 e a ordem é 1. **[1.0]**

1 b) **[2.0]**

$$
\begin{aligned}
x &= (0.\overline{1001})_2 \\
&= 0.100110011001\cdots \\
&= 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-12} + 2^{-13} + \cdots \\
&= (2^{-1} + 2^{-5} + 2^{-5} + 2^{-9} + \cdots) + (2^{-4} + 2^{-8} + 2^{-12} + \cdots) \\
&= 2^{-1}\,\frac{1}{1-2^{-4}} + 2^{-4}\,\frac{1}{1-2^{-4}} \\
&= \frac{2^3+1}{2^4-1} = \frac{9}{15} = 0.6
\end{aligned}
$$

2 a) **[2.5]**

$$\frac{1}{4} = 0.25 \quad r_1 = 1; \quad \mathit{listadigitos} = \{\}$$

$$
\begin{aligned}
&10 \times r_1 = 4 \times q_1 + r_2 \Leftrightarrow 10 = 4 \times 2 + 2 \\
&\mathit{listadigitos} = \{2\}.
\end{aligned}
$$

Como $r_2 \neq 0$, o processo prossegue:

$$
\begin{aligned}
&10 \times r_2 = 4 \times q_2 + r_3 \Leftrightarrow 20 = 4 \times 5 + 0, \quad r_3 = 0 \text{ pára} \\
&\mathit{listadigitos} = \{2, 5\} \quad \text{dízima finita.}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad r_1 = 1; \quad \mathit{listadigitos} = \{\}$$

$$
\begin{aligned}
&10 \times r_1 = 3 \times q_1 + r_2 \Leftrightarrow 10 = 3 \times 3 + 1 \\
&\mathit{listadigitos} = \{3\}.
\end{aligned}
$$

Como $r_2 = r_1 \neq 0$, a dízima é periódica de período 1.

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$
passo 1: $10 \times r_1 = 7 \times q_1 + r_2 \Leftrightarrow 10 = 7 \times 1 + 3, \quad listadigitos = \{1\}$

passo 2: $30 = 7 \times 4 + 2, \quad listadigitos = \{1, 4\}$
passo 3: $20 = 7 \times 2 + 6, \quad listadigitos = \{1, 4, 2\}$
passo 4: $60 = 7 \times 8 + 4, \quad listadigitos = \{1, 4, 2, 8\}$
passo 5: $40 = 7 \times 5 + 5, \quad listadigitos = \{1, 4, 2, 8, 5\}$
passo 6: $50 = 7 \times 7 + 1, \quad (r_6 = r_1), \quad listadigitos = \{1, 4, 2, 8, 5, 7\}$

Como $r_6 = r_1 \neq 0$, a dízima é periódica de período 6. (Falta comtemplar o caso de dízimas periódicas em que $r_k = r_{k-1} \neq 1$ como, por exemplo, 1/6).

2 b) **[3.5]**

```
dizima[n_Integer/;n ≥ 2] :=
        Module[{r1 = 1, listadigitos = {}, y, q, r},
        While[(y = 10 r1;
          q = IntegerPart[y/n]; r = Mod[y, n]; AppendTo[listadigitos, q];
          r ≠ 0),
          If[r == r1||r == 1,
          Return[Print["dizima periodica  ", listadigitos]]];
          r1 = r
                ];
        listadigitos
        ]
```

3 a) Dado que f é contínua em $[0, 1]$, e f muda de sinal nos extremos ($f(0) = 1/2 > 0$, $f(1) = -1/2 < 0$), pelo teorema de Bolzano conclui-se que existe pelo menos um zero de f em $(0, 1)$. Como $f'(x) == -\pi/2 \sin(\pi/2\, x) < 0 \ \forall x \in (0, 1)$, então f é estritamente decrescente neste intervalo, logo existe apenas um zero. Ora, $\cos(\pi/3) = 1/2$, e por conseguinte o valor exacto do zero em causa é $z = 2/3$. **[1.5]**

3 b) **[1.5]**

$$x_1 = \tfrac{0+1}{2} = 1/2$$
$$f(1/2) = \cos(\pi/4) - 1/2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} > 0, \text{ logo } z \in (1/2, 1) \text{ e}$$
$$x_2 = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4} > z$$

Assim, o erro relativo de x_2 é:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{8}$$

3 c) Afirma-se que tomando-se para valor inicial $x_0 = 1.0$, o método converge para $z = 2/3$, valor que é representado em precisão simples pelo número 0.666667. Este valor é guardado em memória no parâmetro a. Como por hipótese ao fim de 6 iterações do método de Newton se obtém o mesmo valor 0.666667, este é atribuído ao parâmetro b (segunda linha do código dado). O resultado final é pois $a - b = 0$. **[1.5]**

4 a) A função iteradora é $g(x) = \sqrt{2\,x + 1/2}$. Dado que por hipótese (x_n) converge para z, e g é contínua em I, por passagem ao limite, resulta da igualdade $x_{n+1} = g(x_n)$ a equação $z^2 = 2\,z + 1/2$, cuja raiz (única) positiva é $z = 1 + \sqrt{6}/2$. Por definição, z é ponto fixo da função iteradora dada. **[1.5]**

4 b) Ver Figura 1. **[1.5]**

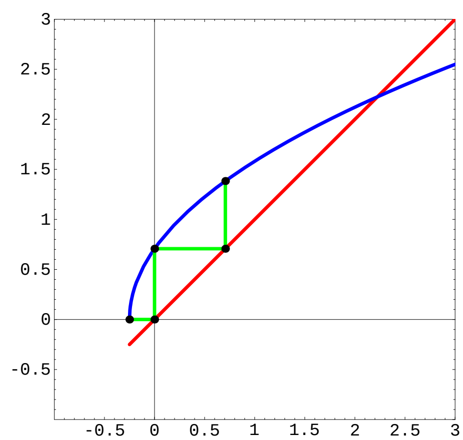

Figure 1: Ponto fixo atractor.

4 c) Como $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,x + 1/2}}$, tem-se que $g'(z) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{6}}} < 1$ e por conseguinte z é ponto fixo atractor. **[1.5]**

4 d) **[2.0]**
Para $x \geq 7/4$, $2\,x + 1/2 \geq 4$, logo $\sqrt{2\,x + 1/2} \geq 2$ e $g'(x) \leq 1/2$. Seja $x \in J$.

Pelo teorema de Lagrange

$$g(x) - z = g'(\xi)\,(x - z), \quad \xi \in (x; z)$$

Logo,

$$|g(x) - z| \leq \frac{1}{2}\,|x - z|$$

Então, para $x = x_0 \in J$, $|x_1 - z| \leq 1/2\,|x_0 - z|$, logo $x_1 \in J$. De igual modo $|x_2 - z| \leq 1/2\,|x_1 - z| \leq \frac{1}{2^2}\,|x_0 - z|$, logo $x_2 \in J$. Conclui-se que as iteradas consecutivas estão no conjunto J e que

$$|x_n - z| \leq \frac{1}{2^n}\,|x_0 - z|, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ e portanto todos os pontos de J pertencem à bacia de atracção do ponto fixo z.