

Teste de recuperação (Parte II) — Matemática Experimental

3 de Janeiro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Os vectores x_1 e w são linearmente dependentes se e só se existem escalares $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ tais que $c_1 x_1 + c_2 w = 0$, onde 0 designa o vector nulo de $\mathbb{R}^4$. Atendendo aos dados, pretende-se assim calcular uma solução não nula do sistema homogéneo, **[2.0]**

$$\begin{cases} \alpha c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + (\alpha - 1) c_2 &= 0 \end{cases}$$

Para obter um valor de α nessas condições bastará executar a instrução

$$\text{Solve}[\text{Det}[\{\{\alpha, 1\}, \{1, \alpha - 1\}\}] == 0, \alpha] [[1]]$$

1 b) **[2.5]**

```
baseQ[l_?MatrixQ, v_?VectorQ] := (  
  (* k é o número de vectores de l; m é o comprimento de cada  
    um desses vectores *)  
  k = Length[l];  
  m = Length[l];  
  (* Rejeitar dados se m ≠ 4, ou v possuir dimensão diferente de 4 : *)  
  If[m ≠ 4 || Length[v] ≠ 4, Return["dados incorrectos"]];  
  (* Seja A matriz de k linhas e 4 colunas, obtida de l por transposição.  
    A dimensão do seu núcleo é 0 se e só se as suas 4 colunas (i.e  
    os vectores de l forem linearmente independentes formando,  
    portanto, uma base : *)  
  A = Transpose[l];  
  If[Length[NullSpace[A]] ≠ 0, Return[Print[l, " não é base"]];  
  (* As coordenadas de v na base constituída pelos vectores de l  
    são solução do sistema A.x = v : *)  
  LinearSolve[A, v]  
)
```

1 c) Para $\alpha = 2$,

[2.0]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema a resolver é:

$$\begin{cases} 2z_1 = 1 \\ z_1 + 5z_2 = 1 \\ 6z_3 = 0 \\ 7z_4 = 0, \end{cases}$$

cujas soluções são $z_1 = 1/2$, $z_2 = 1/10$, $z_3 = z_4 = 0$. Assim, $w = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{10}x_2$.

1 d)

[1.5]

$$\text{LinearSolve}[\{\{2, 0, 0, 0\}, \{1, 5, 0, 0\}, \{0, 0, 6, 0\}, \{0, 0, 0, 7\}\}, \{1, 1, 0, 0\}]$$

2) Escrevendo a equação diofantina dada na forma $ax + b\tilde{y} = c$, com $a = 127$, $b = 52$, $c = -1$ e $\tilde{y} = -y$, e através do algoritmo de Euclides podemos calcular os quocientes parciais a_i do desenvolvimento em fracção contínua de $127/52$:

[2.5]

$$\begin{aligned} 127 &= 52 \times 2 + 23, & a_0 &= 2; \\ 52 &= 23 \times 2 + 6, & a_1 &= 2 \\ 23 &= 6 \times 3 + 5, & a_2 &= 3 \\ 6 &= 5 \times 1 + 1, & a_3 &= 1 \\ 5 &= 1 \times 5 + 0, & a_4 &= 5 \end{aligned}$$

Assim, $n = 4$ e $\frac{127}{52} = [2; 2, 3, 1, 5]$. Necessitamos de calcular $c_3 = p_3/q_3$, ou seja,

$$c_3 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + 1}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}, \Rightarrow p_3 = 22, \quad q_3 = 9.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} x_p &= (-1)^4 9 = 9 \\ \tilde{y}_p &= (-1)^5 22 = -22 \Rightarrow y_p = 22. \end{aligned}$$

Para $k \in \mathbf{Z}$, sabemos que a solução geral é $x_k = x_p - b/c \, k = 9 + 52k$, e $y_k = y_p + a/c \, k = 22 - 127k$. Conclui-se assim que $y \equiv 22 \pmod{127}$.

3 a) Como por hipótese $d \mid (b - 1) \iff b \equiv 1 \pmod{d}$, então $b^j \equiv 1$

[2.5]

$(\text{mod } d) \forall j \geq 1$. Ora,

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0,$$

pelo que

$$n \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{d},$$

i.e.,

$$d \mid n \text{ sse } d \mid (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0).$$

3 b) O símbolo a vale 10 e f vale 15. Como $1 + 1 + 3 + 10 + 5 + 15 = 35$ e $5 \mid 35$, o número n dado é divisível por 5. [1.0]

3 c) [1.5]

```

divisibilidadeQ[x_List] := (
  somaDigitos = Apply[Plus, x];
  xbase10 = FromDigits[x, 9];
  If[Mod[somaDigitos, 2] == 0, Print["2 divide ", xbase10],
    Print["2 não divide ", xbase10]
  ];
  If[Mod[somaDigitos, 4] == 0, Return[Print["4 divide ", xbase10]],
    Print["4 não divide ", xbase10]
  ];
)

```

4 a) Se $(x_n) \xrightarrow{n} \alpha > 0$, então [2.0]

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = g(\alpha),$$

onde a última igualdade é satisfeita visto que g é função contínua em $\mathbb{R}^+$. Assim, α é ponto fixo de g , logo

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{5}{\alpha} \right) \iff \alpha^2 = 5.$$

Como $\alpha > 0$, necessariamente $\alpha = \sqrt{5}$.

4 b) A função $g'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5}{x^2} \right)$ é contínua em $\mathbb{R}^+$. Ela possui um mínimo [2.5]
no ponto $\alpha = \sqrt{5}$, onde toma o valor $\sqrt{5}$, visto que

$$g'(\sqrt{5}) = 0, \quad g'(x) > 0, \text{ se } x > \sqrt{5}, \text{ e } g'(x) < 0 \text{ se } x < \sqrt{5}.$$

Em particular, $g(x) > \sqrt{5}$, $\forall x > \sqrt{5}$. Assim para $x = x_0 = 3$, são satisfeitas as desigualdades

$$\sqrt{5} < x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{14}{6} < x_0$$

Como g é estritamente decrescente à direita do ponto $\sqrt{5}$, então

$$x_2 - x_1 = g(x_1) - g(x_0) < 0.$$

De igual modo se conclui que

$$x_{n+1} < x_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por conseguinte,

$$\sqrt{5} < \dots < x_n < \dots < x_2 < x_1 < 3.$$