

Matemática Experimental – Teste de recuperação (Parte I)

5 de Janeiro de 2004

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1. Ver Aula 6.

2 a)

$divida[d0_ , j_ , p0_ , a_ , k_] := ($
 $(*$ definição recursiva de $p_{n+1} = (1 + a) p_n, n = 0, 1, \dots$ $*)$
 $p[1] = (1 + a) p0;$
 $p[n_] := (1 + a) p[n - 1];$
 $(*$ definição recursiva de $d_{n+1} = d_n (1 + j) - p_n*$)
 $d[1] = d0 (1 + j) - p0;$
 $d[n_] := d[n - 1] (1 + j) - p[n];$
 $d[k])$

2 b)

$(*$ $NN =$ prazo de liquidação da dívida (usou - se NN no lugar de N) $*)$
 $(*$ $Solve[divida[d0, j, p0, a, NN == 0, p0]$ dá regra de substituição $\{\{p0 \rightarrow **\}\}$
que atribuímos a res : $*)$

$amortizacaoInicial[d0_ , j_ , a_ , NN_] := ($
 $res = Solve[divida[d0, j, p0, a, NN] == 0, p0]; p0 /. res)$

2 c)

$ListPlot[Table[Flatten[\{NN, amortizacaoInicial[1000, 0.04, 0.05, NN]\}], \{NN, 1, 25\}]]$

3 a) Atendendo à fórmula recursiva dos números de Fibonacci,

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n = 0, 1, \dots$, vemos que o quociente e o resto da divisão inteira de F_{n+1} por F_n são, respectivamente, 1 e F_{n-1} . Logo,

$\text{mdc}(F_{n+1}, F_n) = F_{n-1}$. De igual modo se obtêm os restos para $F_{n-1}, F_{n-2}, \dots, F_3$:

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_{n-1} &= F_{n-2} + F_{n-3} \\ &\vdots \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 1 \times 1 + 1, \end{aligned}$$

donde se conclui que $\text{mdc}(F_{n+1}, F_n) = 1, \forall n \geq 1$.

3 b) É bem conhecido, por exemplo, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

3. c) O respectivo polinómio característico, $z^2 - z - 1 = 0$, possui raízes distintas $\hat{\Phi} = (1 - \sqrt{5})/2$ e $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$. A solução geral é: $x_n = c_1 \hat{\Phi}^n + c_2 \Phi^n, n = 0, 1, \dots$. Cálculo das constantes:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ \hat{\Phi} c_1 + \Phi c_2 = 1, \end{cases}$$

sistema linear cuja solução é: $c_1 = \frac{-\Phi-1}{\sqrt{5}} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, c_2 = \frac{1+\hat{\Phi}}{\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Assim,

$$x_n = -\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \hat{\Phi}^n + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Phi^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

4 a) Rotina *pontos*:

Dados os pontos de coordenadas $A = (A1, A2), B = (B1, B2)$.

Inicialização: $Xa = A1; Ya = A2; Xb = B1; Yb = B2$.

1. Determinar o vector $\vec{AB} = (a, b) = (Xb - Xa, Yb - Ya)$.
2. Calcular o ponto médio do segmento AB , seja $\vec{P} = (Xm, Ym)$.
3. Atribuir a c o resultado do produto interno de $\vec{AB}$ por $\vec{P}$.

Output: lista $\{a, b, c\}$.

Rotina *centro*:

Dados os vértices A, B e C , utiliza a rotina *pontos* para obter os parâmetros $\{a, b, c\}$ associados ao par (A, B) e de seguida os parâmetros $\{d, e, f\}$ associados ao par de pontos (B, C) . Determina o ponto de intersecção (x, y) das rectas perpendiculares ao meio dos segmentos respectivamente AB e BC (ver alínea 4 b), resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

através da rotina *Solve*.

4 b) Um ponto genérico, de coordenadas (x, y) , da recta perpendicular ao meio do segmento AB satisfaz a equação $(x - Xm, y - Ym) \cdot (a, b) = 0$, i.e. $ax + by = c$, onde $c = aXm + bYm$.

4. c) Dados dois pontos $A = (Xa, Ya)$, $B = (Xb, Yb)$ e um terceiro ponto $P = (Xp, Yp)$, a recta passando em P e perpendicular ao segmento AB satisfaz a equação

$$(x - Xp, y - Yp) \cdot (a, b) = 0, \quad \text{onde} \quad a = Xb - Xa, \quad b = Yb - Ya,$$

ou seja,

$$ax + by = c, \quad \text{sendo} \quad c = aXp + bYp.$$

A nova rotina *pontos* a seguir, produz a lista dos parâmetros a, b e c nas condições referidas:

```
pontos[A1_, A2_, B1_, B2_, C1_, C2_] := Module[{Xa = A1, Xb = B1,
Ya = A2, Yb = B2, Xp = C1, Yp = C2},
a = Xb - Xa;
b = Yb - Ya;
c = b Yp + a Xp;
{a, b, c}]
```

A função *pontos* anterior é chamada duas vezes pela seguinte rotina *alturas* que resulta de modificarmos a rotina *centro* dada, tendo em vista a determinação do ponto de intersecção das alturas do triângulo:

```
centro[A1_, A2_, B1_, B2_, C1_, C2_] := Module[
{Xa = A1, Xb = B1, Ya = A2, Yb = B2, Xc = C1, Yc = C2},
{a, b, c} = pontos[Xa, Ya, Xb, Yb, Xc, Yc];
{d, e, f} = pontos[Xb, Yb, Xc, Yc, Xa, Ya];
LinearSolve[{ {a, b}, {d, e} }, {c, f}]
]
```

O resultado é a lista x, y contendo as coordenadas do ponto de intersecção pretendido.