

Matemática Experimental – Teste de recuperação (Parte I)

4 de Janeiro de 2005

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Por exemplo, $6 \mid (2 \times 3)$, mas $6 \nmid 2$ e $6 \nmid 3$. [1.0]

1 b) É verdade. Como a é primo e $a \nmid b$, então a e b são primos relativos, i.e. $d = \text{mdc}(a, b) = 1$. Recorrendo às equações do algoritmo de Euclides para o cálculo de d , por sucessivas substituições da última para a primeira equação desse algoritmo, sabemos que d se pode escrever como combinação linear de a e b . Isto é, existem inteiros r e s tal que [2.0]

$$1 = r a + s b$$

Neste caso, o comando *Mathematica* referido dá como resultado:

$$\text{ExtendedGCD}[a, b] \longrightarrow \{1, \{r, s\}\}$$

1 c) Seja a primo tal que $a \mid (bc)$ e $a \nmid b$. Atendendo à alínea anterior, existem inteiros r e s tais que $r a + s b = 1$, donde $r a c + s b c = c$. Mas, por hipótese, existe inteiro q tal que $b c = a q$. Então, $a (r c + s q) = c$, logo $a \mid c$. [2.5]

2 a) Dado que 2 e 5 são números primos, pelo "Pequeno Teorema de Fermat" (ver Aula 6), $n^2 \equiv n \pmod{2}$ e $n^5 \equiv n \pmod{5}$. [1.5]

2 b) Uma vez que $n \equiv n \pmod{2}$ e $n^2 \equiv n \pmod{2}$, resulta $n^3 \equiv n^2 \equiv n \pmod{2}$, logo $n^5 \equiv n^3 \equiv n \pmod{2}$. [1.5]

2 c) Visto que $n^5 \equiv n \pmod{5}$, existe inteiro q tal que [2.5]

$$n^5 - n = 5q \quad (*)$$

Como $n^5 \equiv n \pmod{2}$, existe inteiro q' tal que

$$n^5 - n = 2q' \quad (**)$$

De (*) e (**) resulta $5q - 2q' = 0$. Esta equação diofantina tem para solução $(q, q') = (2k, 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo em (*) resulta $n^5 - n = 10k$, i.e. $n^5 \equiv n \pmod{10}$. Conclui-se pois que n e n^5 dão o mesmo resto quando

divididos por 10, o que equivale a dizer que n e n^5 possuem o último dígito igual.

3 a)

[2.5]

- (i) Input: lista x (lista de listas) com pelo menos um elemento.
- (ii) Seja n o comprimento de x . A lista ordenada final, denotada por *resultado*, é inicializada com a primeira lista de x visto que a lista pretendida contém necessariamente pelo menos o primeiro intervalo considerado.

Inicialização: $resultado \leftarrow \{x[[1]]\}$;

- (iii) Caso n seja 1 dar a lista *resultado* e terminar.

- (iv) Ciclo: para i desde 2 a n (teste da i -ésima lista em x), o algoritmo adoptado consiste em comparar a última lista colocada em resultado (seja $lr = Last[resultado]$), com a i -ésima lista de x .

Ou o intervalo representado por lr intersecta o intervalo representado por $x[[i]]$, ou essa intersecção é vazia. Atendendo a que os limites inferiores de cada intervalo dado estão ordenados por ordem crescente, a referida intersecção é não vazia caso seja satisfeita a condição

$$First[x[[i]]] \leq lr[[2]] \quad (1)$$

e se o limite superior do intervalo $x[[i]]$ for menor ou igual ao limite superior de lr o processo continua sem alteração da lista *resultado*; caso contrário deverá substituir-se na lista *resultado* a lista $Last[resultado]$ pela lista $\{lr[[1]], Last[x[[i]]]\}$ e atribuir o resultado dessa substituição à mesma lista *resultado*.

No caso de (1) não se verificar, deverá acrescentar-se à lista *resultado* a lista $x[[i]]$;

- (v) Output: *resultado*.

3 b)

[2.5]

$ordena[x_List] := (n = Length[x];$
 $resultado = \{x[[1]]\};$

```

If[n > 1,
  Do[xi = x[[i]]; lr = Last[resultado];
  If[First[xi] ≤ lr[[2]],
    If[xi[[2]] > lr[[2]],
      resultado = resultado /. {Last[resultado] ->
        {lr[[1]], Last[xi]}},
    (* caso (1) não se verifique fazer : *)
  AppendTo[resultado, xi],
  {i, 2, n}
];
resultado)

```

Teste:

```

ordena[{ {-2, 1}, {-1, 1/2}, {0, 1}, {3/2, 3}, {2, 4} }]
→ { {-2, 1}, {32, 4} }

```

4 a) A equação característica correspondente a sucessões do tipo **[1.5]**
 $s_{n+2} = a s_{n+1} + b s_n$, é

$$z^2 - a z - b = 0,$$

cujas raízes são

$$z_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Admitindo que $z_1 \neq z_2$, a fórmula fechada pretendida tem a forma

$$s_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Os coeficientes c_1 e c_2 são calculados resolvendo o seguinte sistema linear (que se supõe não singular):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

4. b) Relativamente à sucessão dada, obtém-se: **[2.5]**

$$z^2 + 2z - 1 = 0, \quad z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Para os dados do problema, o sistema linear a resolver é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -(1 + \sqrt{2}) & -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções se obtêm facilmente:

$$c_1 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \quad c_2 = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Assim, a fórmula fechada pretendida é a seguinte:

$$s_n = -\frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^n - \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(-1 - \sqrt{2})^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

4. b)

```

recorrendia[s0_Integer, s1_Integer, a_Integer, b_Integer] :=
Module[{d, z1, z2, c},
d = Sqrt[a^2 + 4 b];
z1 = (a - d)/2; z2 = (a + d)/2;
c = LinearSolve[{ {1, 1}, {z1, z2} }, {s0, s1}];
If[z1 != z2, c[[1]] z1^n + c[[2]] z2^n,
n, "raizes iguais"]

```

Teste:

$$res = Simplify[recorrendia[-1, 0, -2, 1]] \longrightarrow \frac{1}{4}((-1 - \sqrt{2})^n (-2 + \sqrt{2}) - (-1 + \sqrt{2})^n (2 + \sqrt{2}))$$