

Teste de recuperação (Parte I) – Matemática Experimental

3 de Janeiro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Como $F_0 = 0, F_1 = 1, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 2, 3, \dots$, os primeiros 500 números de Fibonacci podem ser obtidos através da instrução **[1.5]**

$Table[\{n, f[n]\}, \{n, 0, 499\}]$

1 b) **[3.0]**

Input : n ($n \geq 3$, inteiro)

(i) Construir lista, l , contendo os números de Fibonacci menores ou iguais a n :

$i \leftarrow 0$; (* i -ésimo número de Fibonacci *)

$l \leftarrow \{\}$;

While $i \leq n$ *do*

acrescentar a l o i -ésimo número de Fibonacci;

$i \leftarrow i + 1$ (* incrementa i *)

od :

(ii) Inicializações:

Atribui à constante cl , o cardinal da lista l ;

A primeira parcela da decomposição será l_k , onde k é o índice de l correspondente ao termo mais próximo de n : *)

Se $n > l_{cl}$, então $k \leftarrow cl$;

caso contrário $k \leftarrow (cl - 1)$;

(* Inicializa lista *resultado* com l_k : *)

$resultado \leftarrow \{l_k\}$;

(* A variável *soma* servirá para verificar se a soma dos elementos escolhidos para a decomposição não ultrapassa n : *)

$soma \leftarrow l_k$;

(* A variável i designa o índice de l
 cujo elemento será a parcela p a adicionar a *soma*
 segundo critério de contiguidade : *)
 $i \leftarrow k - 2$ (* parcela seguinte não pode ser contígua à anterior *);
 $p \leftarrow l_i$; (* número de Fibonacci provisório a testar *)

(iii) Ciclos de teste:

While $i \geq 3$ *do*
 (* Escolher número de Fibonacci contíguo ao anterior: *)
While $(soma + p) > n$ *do*
 $i \leftarrow i - 1$;
 $p \leftarrow l_i$
od;
 (* Actualizar *resultado*, escolher parcela não contígua,
 actualizar variáveis : *)
 $resultado \leftarrow p$;
 $soma \leftarrow soma + p$;
 $i \leftarrow i - 2$ (* índice de parcela não contígua *)
 $p \leftarrow l_i$
od;

(iv) Output:

Se $soma == n$ retirar o último elemento de *resultado* caso este tenha
 o valor 0, , dar como *output* a lista *resultado*,
 caso contrário dar lista $\{n, \text{'decomposição não efectuada'}\}$.

1 c)

[2.0]

decomp[$n_Integer$ /; $n \geq 3$] := (
 (* construção de lista l , contendo números de Fibonacci $\leq n$ *)
 $i = 0$;
 $l = \{\}$;
While [$fi = Fibonacci[i]$;
 $fi \leq n$,
AppendTo[l, fi];
 $i++$]
];

```

(* Inicialização *)
cl = Length[l]; (* cl é o cardinal de l *)
(* fixa o último ou penúltimo índice, k,
do elemento de l que será a primeira parcela da decomposição *)
If[n > l[[cl]], k = cl, k = cl - 1];
resultado = {l[[k]]};
soma = l[[k]]; (* inicializa soma das parcelas da decomposição *)
i = k - 2; (* índice da parcela não contígua com a anterior *)
p = l[[i]]; (* parcela provisória a testar *)

While[i ≥ 3,
  While[(soma + p) > n,
    i = i - 1;
    p = l[[i]]
  ];
  (* actualização de lista resultado, índice parcela não contígua, etc : *)
  AppendTo[resultado, p];
  soma = soma + p;
  i = i - 2;
  p = l[[i]]
];
(* retira o último elemento de resultado caso seja o valor 0 *)
If[soma == n, If[Last[resultado] == 0, Drop[resultado, -1], resultado],
  {n, " decomposição não efectuada"}]
)

```

2 a) Para $n = 1$, $F_1(1) = 1 = F_1$. Seja k um inteiro positivo tal que $F_k(1) = F_k$. Como $F_{k+1}(1) = F_k(1) + F_{k-1}(1)$, por hipótese de indução resulta $F_{k+1}(1) = F_k + F_{k-1}$. Dado que os números de Fibonacci satisfazem a igualdade $F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$, então $F_{k+1}(1) = F_{k+1}$. Assim, a igualdade $F_n(1) = F_n$ é válida qualquer que seja o número inteiro positivo n . [2.0]

$$\begin{aligned}
F[1, x_Real] &:= 1 \\
F[2, x_Real] &:= x \\
F[n_Integer /; n \geq 3, x_Real] &:= x F[n - 1, x] + F[n - 2, x]
\end{aligned}$$

2 b) [2.0]

$$\begin{aligned}
&Simplify[Sum[Binomial[n - j - 1, j] x^{n-2j-1}, \{j, 0, Floor[(n - 1)/2]\}]] == \\
&Simplify[F[n, x]]
\end{aligned}$$

3)

[2.5]

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{x_1}, \text{ com } x_1 > 1$$

Logo,

$$x_1 = \frac{1}{\Phi - 1} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

i.e.

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_2}, \text{ com } x_2 = \Phi,$$

Por conseguinte $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$. Donde $\Phi = [1; 1, 1 \dots]$, fracção contínua de período 1 e ordem 0.

4 a) A implicação é falsa. Por exemplo,

[1.5]

$$4 \mid 2 \times 6 \text{ e } 4 \nmid 2, 4 \nmid 6.$$

4 b) Como a e c são coprimos, então existem inteiros x e y tais que $ax + cy = 1$. Como $c \mid (ab)$, então existe inteiro k tal que $ab = kc$. Logo, $abx + cby = b$, ou seja, $kcx + cby = b \Leftrightarrow c(kx + by) = b$, i.e. $b \mid c$.

[2.0]

5) Os divisores próprios de n são:

[3.5]

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{j-1} \text{ e} \\ 2^j - 1, 2(2^j - 1), 2^2(2^j - 1), \dots, 2^{j-2}(2^j - 1)$$

Assim,

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{j-1} = \frac{1 - 2^j}{-1} = 2^{j-1} \\ (2^j - 1)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{j-2}) = (2^j - 1) \frac{1 - 2^{j-1}}{-1} = 2^j - 1$$

Por conseguinte, a soma dos divisores próprios de n é

$$2^j - 1 + (2^j - 1)(2^{j-1} - 1) = (2^j - 1)(1 + 2^{j-1} - 1) = 2^{j-1}(2^j - 1) = n.$$