

1^o teste de Matemática Experimental

9 Novembro de 2004

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Sabe-se (ver Aula 3) que o número de dígitos da representação decimal do inteiro positivo r é [1.5]

$$k = \lfloor \log_{10} 2^{28} \rfloor + 1$$

Ora,

$$\log_{10} 2^{28} = \frac{\log_2 2^{28}}{\log_2 10} = \frac{28}{\log_2 10}$$

Como $2^3 < 10 < 2^4$, logo $3 < \log_2 10 < 4$, donde

$$7 = \frac{28}{4} < \frac{28}{\log_2 10} < \frac{28}{3} = 9.3 \dots$$

Assim, $\lfloor \log_{10} 2^{28} \rfloor \geq 7$, e $k \geq 8$.

1 b) [1.0]

$$r = 2^{28} = 2^{20} \times 2^8 = (2^{10})^2 \times (2^2)^4 = 1024^2 \times 4^4 = 1048576 \times 256 = 268435456,$$

contendo 9 dígitos decimais.

1 c) Visto que $2(x - 2^{28})(x - 1) = 0$ se e só se $x = 1$ ou $x = 2^{28} = r$, o resultado de $Solve[z == 0, x]$ é a lista $\{x \rightarrow 1, x \rightarrow r\}$ (* r é o valor calculado na alínea anterior *). A segunda instrução dará pois como resultado $Floor[1, r] + 1$, ou seja, [1.5]

$$\{1 + 1, r + 1\} \longrightarrow \{2, 268435457\}$$

2 a) [1.0]

A lista dada indica que

$$30031 = 59 \times 509,$$

logo 30031 é um número composto.

2 b)

[1.5]

n	i	$Prime[i]$	$Product[\dots] + 1$
5	1	2	
	2	3	
	3	5	
	4	7	
	5	11	
6	1	2	
	2	3	
	3	5	
	4	7	
	5	11	
	6	13	

Assim, $data = \{2311, 30031\}$, e atendendo à factorização dada por *FactorInteger* conclui-se que $Map[PrimeQ, data] \longrightarrow \{True, False\}$.

2 c) O menor número inteiro não negativo satisfazendo a relação dada é, por definição da relação de congruência, o resto da divisão de $2^{10} = 1024$ por 3, ou seja o valor 1.

[1.5]

2 d) Atendendo ao teorema em causa, $2^{97} \equiv 2 \pmod{97}$, logo

[1.0]

$$Mod[2^{97}, 97] - 2 \longrightarrow 0.$$

3 a)

[3.0]

$randomPrime[m, n : m, n \geq 1 \text{ e } n > m]$ (* primo aleatório em $[m, n]$ *)
 (* há $n - m + 1$ escolhas possíveis para x no intervalo $[m, n]$ *)

(* k conta o número de escolhas de x realizadas *)

$k \leftarrow 1;$

While $k \leq (n - m + 1)$ *do*

$x \leftarrow Random[Integer, \{m, n\}];$

$i \leftarrow 1;$ (* i é o índice do primo a testar *)

While $p_i < x$ *do*

$i \leftarrow i + 1;$

od;

$p \leftarrow p_{i+1};$ (* p é o primeiro primo maior que x *)

Se $p \leq n$ output p e termina;

$k \leftarrow k + 1;$ (* caso p não esteja em $[m, n]$ faz nova escolha de x *)

od;

Imprime mensagem.

3 b) [2.5]

```

randomPrime[m_Integer /; m ≥ 1,
              n_Integer /; n ≥ 1 && n > m] :=
(k = 1;
 While[k ≤ (n − m + 1),
  x = Random[Integer, {m, n)];
 i = 1;
 While[Prime[i] < x, i ++];
 p = Prime[i + 1];
 If[p ≤ n, Return[p];
 k ++];
 Print["intervalo não satisfatório"])
```

3 c) [2.5]

É desenhado um triângulo de vértices (3, 3), (11, 3) e (17, 7).

4 a) Sendo $f(x) = 1/(2 + x)$ e $x = 1$, eis os resultados para uma cada das 3 iterações de f : [1.0]

(i)

$$f(1) = \frac{1}{2 + 1}$$

(ii)

$$f(f(x)) = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}}$$

(iii)

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}}}$$

A instrução dada produz o resultado em (iii). O número z é, pois, $z = 7/17$.

4 b) [1.0]

$$17 = 7 \times 2 + 3$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

Logo, $\text{mdc}(7, 17) = 1$.

4 c) Dado que $17/7$ é o inverso de z , o seu desenvolvimento em fracção contínua é $17/7 = [2; 2, 3]$. Todo o número racional é caracterizado por ter um desenvolvimento finito em fracção contínua pelo que não existe nenhum número racional nas condições requeridas. [1.0]