

2º teste de Matemática Experimental

13 de Dezembro de 2005

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) Como [1.5]

$$\begin{aligned}\pi &= 3 + \frac{1}{1/0.14159\dots} \\ &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1/0.062\dots}},\end{aligned}$$

os convergentes de π , respectivamente de ordens 0 e 1, são:

$$\begin{aligned}c_0 &= 3 \\ c_1 &= 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.\end{aligned}$$

Atendendo à "lei da melhor aproximação por convergentes", sabe-se que

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \left| \pi - \frac{22}{i} \right|, \quad 3 \leq i \leq 7.$$

As restantes fracções irredutíveis nas condições do enunciado, 22/9, 22/11, ..., 22/27 possuem um erro obviamente superior ao erro de 22/7.

1 b) [1.5]

Input : j (inteiro não negativo)

$x \leftarrow \pi$;

$a \leftarrow \{ \}$; (* lista dos quocientes parciais $ai's$ *)

$i \leftarrow 0$; (* i é a ordem do elemento a calcular *)

While $i \leq j$ do

$ai \leftarrow \lfloor x \rfloor$; (* parte inteira de x *)

acrescenta o elemento a_i à lista de resultados;

$frac \leftarrow x - ai$; (* parte fraccionaria de x *)

$x \leftarrow 1/frac$; (* reinicia com o quociente completo *)

$i \leftarrow i + 1$; (* incrementa o contador i *)

od;

Output : a .

1 c)

[1.5]

```

fc[j_Integer /; j ≥ 0] := (x = Pi;
a = { }; (* lista dos quocientes parciais ai's *)
i = 0; (* contador de quocientes calculados *)

While[i ≤ j,
ai = IntegerPart[x];
(* acrescenta à lista de resultados a *)
(* a parte inteira de x : *)
AppendTo[a, ai];
frac = x - ai; (* parte fraccionaria de x *)
(* reinicia com o quociente completo *)
x = 1/frac;
i ++];
a
)

```

1 d)

[1.5]

$$\begin{aligned}
 22/7 &= [a_0; a_1] = [3; 7] \\
 22 &= 7 \times 3 + 1, \quad a_0 = 3 \\
 3 &= 1 \times 7 + 0, \quad a_1 = 7.
 \end{aligned}$$

1 e) Sabe-se que sendo $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, o convergente de ordem n de π , é satisfeita a desigualdade

[1.0]

$$|\pi - c_n| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Logo, $|\pi - c_1| < \frac{1}{7^2}$.

2) Fazendo $k = n - 1$, então $c_{k+1} = c_n = \frac{a}{b}$, $c_k = c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $q_k = q_{n-1}$ e $q_{k+1} = q_n = b$. Logo, da igualdade dada, obtém-se:

[2.5]

$$\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{b q_{n-1}}.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior pelo menor múltiplo comum dos denominadores, resulta

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

e após multiplicação de ambos os membros por $(-1)^{n-1} c$, obtém-se:

$$a (-1)^{n-1} q_{n-1} c - b (-1)^{n-1} p_{n-1} c = (-1)^{2n-2} c = c.$$

Logo, os inteiros $x_p = (-1)^{n-1} q_{n-1} c$ e $y_p = (-1)^{n-1} p_{n-1} c$ satisfazem a equação $a x_p + b y_p = c$, i.e. constituem uma solução particular da equação diofantina dada.

3. O problema traduz-se na resolução da equação diofantina

$$25x + 10y = 2500$$

a qual tem solução pois $d = \text{mdc}(25, 10) = 5$, e 5 divide $c = 2500$.

3 a) Admitindo que $x = y$ e substituindo na equação, resulta $x = \frac{500}{7}$, valor [1.0]
que não é inteiro.

3 b) Atendendo a que $25 = 10 \times 2 + 5$, temos que $r = 1$ e $s = -2$. Assim, [1.5]
a equação diofantina de partida tem a seguinte solução geral:

$$\begin{cases} x_k = \frac{c}{d} r - \frac{b}{d} k = 500 - 2k \\ y_k = \frac{c}{d} s - \frac{a}{d} k = -1000 + 5k, \quad k \text{ inteiro.} \end{cases}$$

O número de lotes de cada espécie é não negativo, ou seja, $500 - 2k \geq 0$, e $-1000 + 5k \geq 0$, pelo que k é qualquer inteiro do intervalo $[200, 250]$.

Seja $g(k) = x_k - y_k = 1500 - 7k$. Interessa calcular um inteiro k tal que $|x_k - y_k|$ seja o mais próximo possível de 0. Como $g(k) > 0$ sse $k < 1500/7 = 214.2\dots$, i.e $k \leq 214$, e $g(k) < 0$ sse $k \geq 215$, há que comparar $g(214) = 2$ com $g(215) = 5$. Assim, deverão transportar-se $x_{214} = 72$ lotes de galinhas e $y_{214} = 70$ lotes de patos. Irão ser abatidas $25 \times 72 = 1800$ galinhas.

4 a) [1.5]

$$29 \equiv 1 \pmod{7} \implies 29^{1079} \equiv 1 \pmod{7},$$

$$62 \equiv -1 \pmod{7} \implies 62^{93} \equiv -1 \pmod{7},$$

$$127 \equiv 1 \pmod{7} \implies 127^3 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Logo, $m \equiv 1 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod{7}$, i.e. o resto da divisão de m por 7 vale 1.

4 b) [1.5]

$aExpoenteb[a_Integer \ /; \ a > 0, b_Integer \ /; \ b > 0] := ($
 $(* \ a^b = a * a * a * \dots * a, \text{ produto com } b \text{ factores } *)$
 $p[1] = a;$
 $p[k_]:=p[k-1] * a;$
 $p[b] \ (\ (* \ p[b] \text{ vale } a^b \ *))$

Teste:

$Mod[Apply[Plus,$
 $Map[aExpoenteb[\#[[1]], \#[[2]]] \&, \{\{29, 1079\}, \{62, 93\}, \{127, 3\}\}], 7]$
 $\longrightarrow 1$

4 c)

[2.0]

$$\begin{aligned}
 p[1] &= a \\
 p[2] &= a \times a \quad (1 \text{ multiplicação}) \\
 p[3] &= a \times a \times a \quad (2 \text{ multiplicações}) \\
 &\vdots \\
 p[b] &= a \times a \times a \times \dots \times a \quad (b-1 \text{ multiplicações})
 \end{aligned}$$

O número total, N , de multiplicações é:

$$N = 1 + 2 + \dots + (b-1) = \frac{b}{2} \times (b-1) = \mathcal{O}(b^2).$$

5 a) Como $mdc(1, 11) = mdc(11, 10) = 1$, sabe-se que a fracção (irredutível) é periódica. O seu período é o menor inteiro positivo que satisfaça a congruência $10^j \equiv 1 \pmod{11}$. Ora,

[1.5]

$$\begin{aligned}
 10 &\equiv 10 \pmod{11} \\
 10^2 &\equiv 1 \pmod{11}
 \end{aligned}$$

Assim, o período é 2. De facto,

$$\begin{aligned}
 10 &= 11 \times 0 + 10 \iff \frac{10}{11} = 0 + \frac{10}{11} \\
 100 &= 11 \times 9 + 1 \iff \frac{100}{11} = 9 + \frac{1}{11}
 \end{aligned}$$

A representação de x na base 10 é, pois,

$$1/11 = 0.09090909\dots = (0.\overline{09})_{10}$$

cuja ordem é 1.

5 b)

[1.5]

```

período[m_Integer /; m > 0, n_Integer /; n > 0] := (
(* caso dados não satisfaçam as condições de co-primalidade: *)
If[GCD[m, n] ≠ 1 || GCD[n, 10] ≠ 1, Return["fracção não satisfatória"]];
(* inicializa com potência j = 1*)
j = 1;
(* Enquanto 10j não dá resto 1 quando dividido por n, incrementa j : *)
While[Mod[10j, n] ≠ 1, j ++];
(* O primeiro j não verificando a condição anterior é o período da fracção : *)
j)

```