1º teste de Matemática Experimental

11 de Novembro 2003

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Resolução

1 a) menor(x: x é lista de 100 inteiros)
Se o cardinal de x for diferente de 100 ou algum dos seus elementos não for inteiro, termina dando mensagem apropriada;
(* Significado das variáveis:
t= inicialmente contém o valor x_1 e depois sucessivos valores de x eventualmente menores que x_1. No final t contém o menor elemento da lista dada.
i = índice do elemento de x a testar em cada passo do algoritmo. Inicia-se com $i = 2$ e termina com $i = 100$.
v= valor do i-ésimo elemento da lista x.
*)

$t \leftarrow x_1$;
$i \leftarrow 2$;
$While\ \ i \leq 100\ \ do$
  $v \leftarrow x_i$;
    $Se\ \ v < t$ então $t \leftarrow v$;
  incrementa i;
        od;
$output:\ \ t$.

1 b)

$menor[x\_List] := Module[\{i, t\},$
  $If[Length[x]\,!= 100 \,||\, Intersection[Map[IntegerQ, x], \{True\}]\,!=\ \{True\},$
    $Return[$"não é lista de 100 inteiros"$]$
  $];$
  $t = x[[1]];$
  $i = 2;$

$$
\begin{aligned}
&While[i \leq 100,\\
&\quad v = x[[i]];\\
&\quad If[v < t, t = v];\\
&\quad i++\\
&\quad\quad];\\
&t]
\end{aligned}
$$

1 c) A função real $f(x) = x^2 - 4\,x + 4 = (x-2)^2$ tem um mínimo global, 0, em $x = 2$. Como $2 \in \{-49, -48, \cdots, 49, 50\}$, o resultado da aplicação de *menor* à lista $\{f(-49), f(-48), \cdots, f(49), f(50)\}$ é 0.

2 a) A proposição "6 divide $7^n - 1$" é verdadeira para $n = 1$. Admitindo que ela é válida para um inteiro $k \geq 1$, i.e. que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$7^k - 1 = 6\,q,$$

prove-se que a proposição é válida para o inteiro $k+1$:

$$7^{k+1} - 1 = 7^k \times 7 - 1 = 7^k(6+1) - 1 = 7^k - 1 + 6 \times 7^k.$$

Assim, usando a hipótese de indução, resulta

$$7^{k+1} - 1 = 6\,q + 6 \times 7^k = 6(q + 7^k) = 6\,r,\ r \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6 \mid 7^{k+1} - 1.$$

Por conseguinte, a proposição enunciada é válida para qualquer inteiro positivo n.

2 b) A lista dada é constituída por inteiros da forma $7^n - 1$, com n desde 1 a 5. Atendendo à alínea anterior, o resto da divisão de cada um dos elementos de *data* por 6 é 0. Logo, o resultado esperado é um produto de cinco zeros, ou seja, o valor 0.

3 a) Seja $n > 2$ composto, i.e. $n = a\,b$ com $1 < a, b < n$. Necessariamente $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ (caso contrário $n = a\,b > n$). Como $n = a\,b$ então por definição a e b são divisores de n e por conseguinte existe pelo menos um divisor de n menor ou igual a $\sqrt{n}$.

3 b)

$$
\begin{aligned}
&primoQ[n\_Integer\,/;\ n \geq 2] := (q = 2;\\
&While[q < n,\\
&\quad If[Mod[n, q] == 0, Return[0]];\\
&q++\\
&\quad\quad];\\
&1)
\end{aligned}
$$

4. Dados $b > 0$ e $a \geq b$ inteiros, sabemos que existem inteiros q e r tais que $a = b\,q + r, \quad 0 \leq r < b$. Logo, se $d \mid a$ e $d \mid b$ então $d \mid r$, e por conseguinte $mdc(a, b) = mdc(b, r)$. No caso de $r \neq 0$ conclui-se de modo análogo que existe $r_1 < r$ tal que $mdc(b, r) = mdc(r, r_1)$. Assim, por efeito de divisões inteiras sucessivas, no final de quando muito b passos chegaremos a um resto nulo e o $mdc(a, b)$ será o último resto não nulo calculado. Para $a = 1950$ e $b = 366$, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&1950 = 366 \times 5 + 120 \\
&366 = 120 \times 3 + 6 \\
&120 = 6 \times 20,
\end{aligned}
$$

donde $mdc(1950, 366) = 6$.