# Matemática Experimental

Teste de recuperação (Parte II) – 4 Janeiro de 2005

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

$1^o$ ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos.

**Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.**

**1.** Considere o seguinte número $x$, representado na base 2:

$$x = (0.\overline{1001})_2$$

**1 a)** Diga qual é o período e a ordem de $x$. **[1.0]**
**1 b)** Efectue os cálculos que lhe permitam escrever $x$ na base 10. **[2.0]**

**2. )** Se $N \geq 2$ for um inteiro, a fracção $1/N$ é representada por uma dízima, isto é, uma sequência de dígitos decimais $0.q_1\, q_2\, q_3 \cdots$. Sabe–se que qualquer número racional pode ser representado por uma dízima finita, ou infinita periódica. No caso particular de números do tipo $1/N$, o comprimento da dízima respectiva (ou do seu período) não excede $N$. Em ambos os casos, os dígitos $q_j$ podem ser calculados através das relações

$$\begin{aligned} r_1 \quad &= 1 \\ 10\, r_j \quad &= N \times q_j + r_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

onde os números $r_j$ designam restos de divisões sucessivas.

**2 a)** Tomando como exemplos, respectivamente, a dízima finita $\frac{1}{4} = 0.25$ e as dízimas infinitas periódicas $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$, $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$, escreva detalhadamente os cálculos necessários para a obtenção dos dígitos respectivos. Para o efeito utilize devidamente as relações (1). **[2.5]**

**2 b)** Generalize as experiências numéricas que realizou na alínea anterior escrevendo uma rotina *Mathematica*, de nome *dizima*, cujo dado de entrada seja um número $n \geq 2$, e a saída seja uma lista contendo os dígitos da dízima $1/n$ de modo que: **[3.5]**
(i) se a dízima for finita, fazer sair a lista dos dígitos $q_1, q_2, \cdots, q_k$.
(ii) se a dízima for infinita periódica, fazer sair a lista dos dígitos $q_1, q_2, \cdots, q_s$ e uma mensagem dizendo que a dízima é periódica.

(Sugestão: recorra aos comandos $IntegerPart[x]$ — parte inteira de $x$ e $Mod[m,n]$ — resto da divisão de $m$ por $n$).

**3.** Considere a função real

$$f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}\,x) - \frac{1}{2}$$

**3 a)** Prove que $f$ possui um único zero $z$ no intervalo $[0,1]$. Verifique que $z = 2/3$. **[1.5]**

**3 b)** No caso do valor exacto da segunda iterada, $x_2$, do método da bissecção ser superior a $z$, calcule o respectivo erro relativo. Justifique. **[1.5]**

**3 c)** Sabe-se que fazendo $x_0 = 1.0$, e aplicando o método de Newton com precisão simples, se obtém o valor 0.666667 ao fim de 6 iterações. Diga, justificando, que resultado espera obter se executar o seguinte código *Mathematica*? **[1.5]**

$$a = FixedPoint[(\# - f[\#]/f'[\#])\,\&, 1.0];$$
$$b = Last[NestList[(\# - f[\#]/f'[\#])\,\&, 1.0, 6]];$$
$$a - b$$

**4.** Sabe-se que no intervalo $I = [-1/4, +\infty)$ o sistema dinâmico

$$x_0 = 4$$
$$x_{n+1} = \sqrt{2\,x_n + 1/2}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

possui um único ponto fixo $\alpha$, e que $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

**4 a)** Determine o valor desse ponto fixo. Justifique. **[1.5]**

**4 b)** Mediante um diagrama apropriado, localize no plano as iteradas $x_1$ a $x_3$, se iniciar o processo iterativo com $x_0 = -1/4$. **[1.5]**

**4 c)** Mostre que o ponto fixo em causa é atractor. Justifique. **[1.5]**

**4 d)** Justificando analiticamente, diga que pontos do conjunto $J = [7/4, +\infty)$ pertencem à bacia de atracção do ponto fixo em causa. **[2.0]**