Matemática Experimental

Teste de recuperação (Parte II)– 3 de Janeiro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1) Considere os vectores de $\mathbb{R}^4$, $x_1 = (\alpha, 1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 5, 0, 0)$, $x_3 = (0, 0, 6, 0)$, $x_4 = (0, 0, 0, 7)$, e $w = (1, \alpha - 1, 0, 0)$, onde α é um número real.

1 a) Escreva código *Mathematica* que lhe permita calcular um valor de α para o qual os vectores x_1 e w sejam linearmente dependentes. Justifique. **[2.0]**

1 b) Escreva código para uma função que tenha como dados uma lista, l, contendo um número arbitrário de vectores de $\mathbb{R}^4$, e um vector qualquer $v \in \mathbb{R}^4$. Valide os dados recorrendo aos predicados $MatrixQ$ e $VectorQ$. Como resposta, a função dará uma mensagem dizendo se o conjunto de vectores da lista l constitui ou não uma base de $\mathbb{R}^4$. No caso positivo, a função produzirá também as coordenadas do vector v na base em causa. Comente devidamente o seu código. (Nota: se recorrer à rotina $NullSpace$ deverá justificar o seu uso. Por exemplo, $NullSpace[\{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}]$ produz o resultado $\{\{1, 0\}\}$). **[2.5]**

1 c) Seja $\alpha = 2$. Diga qual o resultado que espera obter ao fornecer à função que escreveu na alínea 1 b), uma lista contendo os 4 vectores x_1 a x_4, seguida do vector w. Justifique. **[2.0]**

1 d) Como verificaria o resultado a que se chegou na alínea 1 c) através de uma linha de código *Mathematica* utilizando a rotina $LinearSolve$? **[1.5]**

2) Considere a equação diofantina **[2.5]**

$$a\,x + b\,y = c, \text{ onde } mdc(a, b) = 1, \; c \neq 0.$$

Seja c_n o convergente de ordem n ($n \geq 1$) de a/b, i.e.
$c_n = a/b = [a_0; a_1, \ldots, a_n] = p_n/q_n$.
Uma solução particular (x_p, y_p) da equação diofantina pode calcular-se através das expressões

$$\begin{aligned} x_p &= (-1)^{n-1}\, q_{n-1} \times c \\ y_p &= (-1)^{n}\, p_{n-1} \times c \qquad (*) \end{aligned}$$

Utilizando as fórmulas $(*)$, calcule a solução geral da equação diofantina

$$127\,x - 52\,y = -1.$$

Diga, justificando, se é verdadeiro ou falso que $y \equiv 9 \ (mod\,127)$.

3 a) Seja $b \geq 2$ uma base de representação de números, $d \geq 2$ um inteiro. Prove que se $d \mid (b-1)$, então o número $n = (a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0)_b$ é divisível por d se e só se $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0$ é divisível por d. **[2.5]**

3 b) Mediante aplicação do critério anterior, diga se o número **[1.0]**

$$n = (1130a5f0)_{16}$$

é divisível por 5.

3 c) Baseado no critério enunciado na alína 3 a), escreva um programa *Mathematica* para decidir se um dado número positivo n, representado na base 9, é divisível por 2 ou por 4. Tome para dados a lista dos dígitos da representação de n na base considerada. A resposta será uma mensagem dizendo se o número em causa é ou não divisível e, sendo-o, a sua representação na base 10. (Poderá utilizar a rotina *FromDigits*). **[1.5]**

4) Considere a função real $g(x) = \dfrac{1}{2}\,(x + \dfrac{5}{x})$, e o processo iterativo

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

4 a) Admitindo que a sucessão (x_n) é convergente para um número $\alpha > 0$, que número é esse? Justifique. **[2.0]**

4 b) Mostre que a sucessão (x_n) é estritamente monótona decrescente, limitada por $\sqrt{5}$. **[2.5]**