Matemática Experimental

Teste de recuperação (Parte I) – 3 de Janeiro 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1 a) Recorrendo à rotina *Table*, e à função **[1.5]**

$$f = Fibonacci\,\texttt{[\#]\&}$$

escreva uma linha de código para obter os primeiros 500 números de Fibonacci. Justifique.

1 b) Escreva pseudo-código para um algoritmo que possua para dados de entrada um número positivo $n \geq 3$, e como saída a sua decomposição em números de Fibonacci distintos e não adjacentes. Por exemplo, $15 = 13 + 2$; $54 = 34 + 13 + 5 + 2$; $73 = 55 + 13 + 5$. No caso dessa decomposição não ser possível o resultado será o número n, acompanhado da mensagem "decomposição não efectuada". Explique o funcionamento do algoritmo bem como o significado das variáveis que utilizar. (Sugestão: o algoritmo começa por gerar os números de Fibonacci não superiores a n). **[3.0]**

1 c) Traduza o algoritmo da alínea anterior num programa *Mathematica*. **[2.0]**

2) Os polinómios de Fibonacci, $F_n(x)$, $(n \geq 1,\, x \in \mathbb{R})$ obedecem às seguintes relações de recorrência:

$$\begin{aligned}
&F_1(x) = 1\\
&F_2(x) = x\\
&F_{n+1}(x) = x\,F_n(x) + F_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

2 a) Prove, utilizando indução matemática sobre n, que $F_n(1) = F_n$, onde o membro direito desta igualdade representa um número de Fibonacci. **[2.0]**
Traduza a função $F_n(x)$ numa função *Mathematica* usando três cláusulas e validação dos dados.

2 b) Sabe-se que, qualquer que seja o número natural n, é satisfeita a **[2.0]**

identidade

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left(\begin{array}{c} n-j-1 \\ j \end{array} \right) x^{n-2\,j-1},$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é a função parte inteira inferior e $\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right)$ é o coeficiente binomial ($Binomial[n, m]$).

Aproveite a função que escreveu na alínea 2 a) num programa (devidamente comentado), capaz de verificar a identidade anterior, com n variando desde 1 a 300.

3) Mostre que ao 'número de ouro' está associada uma fracção contínua infinita periódica. Escreva os cálculos necessários para identificar o período e a ordem dessa fracção contínua. **[2.5]**

4) Sejam a, b e c números inteiros.

4 a) Qual é o valor lógico da seguinte implicação? Justifique. **[1.5]**

$$a \mid (b\,c) \Longrightarrow a \mid b \text{ ou } a \mid c.$$

4 b) Como sabe, para que existam inteiros x e y satisfazendo a equação $a\,x + b\,y = c$, é necessário e suficiente que $mdc(a, b) \mid c$. Utilize este resultado para mostrar que, no caso de a e c serem coprimos, se $c \mid (a\,b)$, então $c \mid b$. **[2.0]**

5) Um número natural diz-se perfeito se for igual à soma dos seus divisores próprios. Seja $j \geq 2$ um número inteiro e suponha que $2^j - 1$ é número primo. Prove que o número **[3.5]**

$$n = 2^{j-1}\,(2^j - 1)$$

é perfeito.