Matemática Experimental

2^o Teste – 13 de Dezembro de 2005

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 45 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1 a) Sabe-se que $\pi \simeq 3.14159\ldots$ e $1/0.14159\ldots = 7.062\ldots$. De todas as fracções irredutíveis da forma $\dfrac{22}{i}$, com $3 \leq i \leq 27$, existe uma que é considerada "a melhor aproximação racional" de π. Calcule essa aproximação. Justifique por que razão ela é tida como "a melhor". **[1.5]**

1 b) Escreva pseudo-código para um algoritmo capaz de calcular um desenvolvimento (finito) em fracção contínua do número π, i.e. $\pi \simeq [a_0; a_1, \ldots, a_j]$, dado $j \geq 0$. Justifique. **[1.5]**

1 c) Traduza o algoritmo anterior num programa *Mathematica*. Poderá utilizar os comando de nomes Pi e $IntegerPart$, mas não o comando $FractionalPart$. **[1.5]**

1 d) Utilize o número racional 22/7 para ilustrar a ligação existente entre o algoritmo de Euclides e o desenvolvimento em fracção contínua desse número. Justique. **[1.5]**

1 e) Designe por r o convergente de primeira ordem do número π. Indique, justificando, um majorante do erro $|\pi - r|$. **[1.0]**

2) Considere a equação diofantina **[2.5]**

$$a\,x + b\,y = c, \text{ onde } mdc(a,b) = 1, \text{ e } a, b, c \neq 0.$$

Seja c_n o convergente de ordem n ($n \geq 0$) de a/b, i.e.
$c_n = a/b = [a_0; a_1, \ldots, a_n] = p_n/q_n$. Como sabe, é válida a igualdade

$$c_{k+1} - c_k = \frac{(-1)^k}{q_k\,q_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

Conclua, em primeiro lugar, que

$$\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{b\,q_{n-1}},$$

e deduza que uma solução particular (x_p, y_p) da equação diofantina pode calcular-se através das expressões

$$\begin{aligned} x_p &= (-1)^{n-1}\, q_{n-1} \times c \\ y_p &= (-1)^{n}\, p_{n-1} \times c\,. \end{aligned}$$

3) Um certo aviário possui galinhas e patos, num total de 2500 animais. Devido à gripe das aves, foi ordenado o abate de todo o aviário. Para isso, é necessário dividir os animais em lotes de 25 galinhas e 10 patos, a fim de facilitar o seu transporte de uma só vez.

3 a) Diga, justificando, se há possibilidade de transportar o mesmo número de lotes de galinhas e de patos. **[1.0]**

3 b) Calcule o número de lotes a transportar de cada uma das espécies, por forma que o número de lotes de galinhas seja o mais aproximado possível do número de lotes de patos. Nesse caso, quantas galinhas vão ser abatidas? Justifique. **[1.5]**

4 a) Considere o número natural $m = 29^{1070} + 62^{93} + 127^3$. Prove que o resto da divisão de m pelo número 7 vale 1. **[1.5]**

4 b) Escreva uma função *Mathematica*, de nome *aExpoenteb*, a qual use como argumentos dois inteiros positivos a e b, e calcule <u>recursivamente</u> o número a^b. **[1.5]**
Escreva código para testar o resultado que obteve na alínea 4 a). Para esse efeito, além da função *aExpoenteb*, deverá utilizar nomeadamente as rotinas *Apply*, Map e Mod. (Assuma que foi previamente realizada a atribuição $\$RecursionLimit = Infinity$).

4 c) Mostre que o número de multiplicações envolvido no algoritmo que utilizou para definir a função *aExpoenteb* é da ordem $\mathcal{O}(b^2)$. **[2.0]**

5 a) Diga, justificando, se o número $x = 1/11$, representado na base 10, é ou não uma dízima periódica. No caso afirmativo determine o seu período e ordem. **[1.5]**

5 b) Dada uma fracção $x = \dfrac{m}{n}$, tal que $0 < m < n$, $mdc(m, n) = mdc(n, 10) = 1$, escreva um programa *Mathematica* que permita calcular o período da representação decimal de x. Os dados são os inteiros m e n. Documente devidamente o seu programa. **[1.5]**