

Cálculo Diferencial e Integral III — Resumo

João TEIXEIRA, Maria João BORGES

1º Semestre de 2019/2020

Índice

1	Equações Diferenciais Ordinárias	5
1.1	Introdução	5
1.1.1	Notação e Definições	5
1.1.2	Ordem e Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária	6
1.1.3	Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	7
1.2	Equações Escalares de Primeira Ordem	8
1.2.1	Determinação da Solução Geral	8
1.2.2	Equações Lineares	8
1.2.3	Equações Separáveis	10
1.2.4	Equações Exactas	13
1.2.5	Equações Redutíveis a Exactas	15
1.3	Equações Diferenciais Ordinárias de ordem n . Equações Vectoriais.	19
1.3.1	Equações Lineares de ordem n . Caso Homogéneo.	19
1.3.2	Equações Lineares de Coeficientes Constantes. Caso Homogéneo.	20
1.3.3	Equações Vectoriais Lineares — Caso Homogéneo	25
1.4	Equações Vectoriais de 1ª Ordem (ou Sistemas)	26
1.4.1	Equações Vectoriais Lineares	28
1.4.2	Equações vectoriais Lineares — Caso Não Homogéneo	31
1.4.3	Equações Vectoriais Lineares de Coeficientes Constantes:	33
1.4.4	Cálculo de uma Matriz Solução Fundamental no caso A diagonalizável	42
1.5	Equações Lineares de ordem $n > 1$ — Caso Não Homogéneo	47
1.5.1	Cálculo da Solução da Equação — Fórmula da Variação das Constantes	47
1.5.2	Método dos Coeficientes Indeterminados	51
1.6	Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções	54
1.6.1	Teorema de Peano	55
1.6.2	Exemplo de não unicidade de solução	55
1.6.3	Condição de Lipshitz	57
1.6.4	Teorema de Picard	58
1.6.5	Prolongamento de Solução	67
1.6.6	Comparação de Soluções	69
1.7	Apêndice 1 - Cálculo da Matriz e^{At} por diagonalização	72
1.8	Apêndice 2 - Transformada de Laplace	79
1.8.1	Definição e Propriedades	79
1.8.2	Aplicações da Transformada de Laplace às equações diferenciais	83
1.8.3	Distribuição Delta de Dirac	85

1.8.4 Inversão da Transformada de Laplace	87
---	----

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Introdução

1.1.1 Notação e Definições

Designa-se por *equação diferencial* uma relação de igualdade entre termos envolvendo uma função $y(x)$, as suas derivadas e a variável independente x . A equação poderá também depender de parâmetros não directamente relacionados com a variável independente x . É talvez mais simples pensar numa equação diferencial como uma equação cuja incógnita pertence a um *espaço de funções*

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x)) \in \mathbb{R}^m$$

(pode-se ter \mathbb{C} em vez de \mathbb{R}). Desta forma, x_1, \dots, x_n são as variáveis independentes (e a dimensão do domínio de y , $n \in \mathbb{N}$, o seu número) e y_1, \dots, y_m as variáveis dependentes (e a dimensão do contradomínio de y , $m \in \mathbb{N}$, o seu número). Note que os (eventuais) parâmetros não são contados como variáveis independentes ou dependentes da equação.

As equações diferenciais dizem-se *ordinárias* se o domínio da função $y(x)$ está contido em \mathbb{R} , caso em que as derivadas que nela surgem são totais (em ordem a $x \in \mathbb{R}$). Dizem-se *parciais* se têm mais do que uma variável independente (o domínio de $y(x)$ está contido em \mathbb{R}^n) e envolvem derivadas parciais de y (em ordem a x_1, x_2, \dots).

As equações diferenciais classificam-se como *escalares* ou *vectoriais* consoante tenham uma ou mais do que uma variável dependente (ou seja, o contradomínio de $y(x)$ está contido em \mathbb{R} no caso escalar e \mathbb{R}^m no caso vectorial). Neste último caso é costume considerar que a variável dependente é o vector $y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x)) \in \mathbb{R}^m$.

Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} + 2axy = 0$$

é ordinária, x é a variável independente e $y = y(x)$ a variável dependente, enquanto a é um parâmetro. Já a 2ª Lei de Newton para o movimento de uma partícula em \mathbb{R}^3

$$F(t, \mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{1.1}$$

é uma equação ordinária vectorial, pois $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aqui utilizou-se a notação de Newton

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

para representar as 1ª e 2ª derivadas em ordem a t . A massa da partícula, m , é apenas um parâmetro.

Como exemplos de equações diferenciais parciais escalares, podemos indicar a *equação de Laplace* num domínio bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

(já introduzida na Análise Complexa), onde $u : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; a *equação do calor* unidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$; a *equação das ondas* unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Também poderemos ter versões tridimensionais destas equações como, por exemplo, a equação do calor no espaço:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \stackrel{\text{def}}{=} k \nabla^2 u$$

onde $u = u(t, x, y, z)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ e ∇^2 é o *operador laplaciano*.

Alguns problemas de equações diferenciais parciais são de estudo muito difícil. Um dos mais conhecidos exemplos consiste nas equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u = \nu \nabla^2 u + f(t, x)$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

onde $u = u(t, x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$, com $t \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$. As suas soluções descrevem o campo de velocidade, u , de um fluido incompressível de viscosidade ν que ocupa o domínio D e está sujeito a uma força exterior f . Trata-se, pois, de uma equação diferencial parcial vectorial, que é bem conhecida pelas suas aplicações à hidrodinâmica e aerodinâmica. Para uma descrição de um problema em aberto relacionado com estas equações ver

http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations

Dedicaremos o que resta deste capítulo ao estudo das equações diferenciais ordinárias.

1.1.2 Ordem e Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial (ordinária ou parcial) diz-se de ordem n se a maior ordem das derivadas das suas variáveis dependentes y_1, \dots, y_m é n . Representamos o espaço vectorial das funções contínuas $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ (com I um intervalo aberto) por $C(I, \mathbb{R}^m)$, que abreviaremos para $C(I)$. O espaço vectorial das funções contínuas e com derivadas contínuas até à ordem n será representado por $C^n(I, \mathbb{R}^m)$ ou, abreviadamente, $C^n(I)$. Assim:

$$C^n(I) = \left\{ y \in C(I) : y', y'', \dots, y^{(n)} \in C(I) \right\}$$

Uma função f é de classe C^n em I se e só se $f \in C^n(I)$.

Diz-se que uma função $y \in C^n(I)$, onde I é um intervalo aberto, é uma solução da equação diferencial (em I) se satisfaz a equação para qualquer $t \in I$, ou seja, se substituindo $y_1(t) \cdots y_n(t)$ na equação diferencial se obtém uma identidade, qualquer que seja $t \in I$.

Consideraremos equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem (escalares ou vectoriais) que podem ser explicitadas na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

onde $f : I \times D$, e onde D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m . Uma solução da equação (1) é uma função $y \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ tal que $y(t) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$ para qualquer $t \in I$.

Como veremos posteriormente, o estudo de alguns tipos de equações ordinárias de ordem n (escalares ou vectoriais) pode ser reduzido ao das equações vectoriais de 1ª ordem. Por exemplo, na 2ª Lei de Newton (1.1), introduzindo como variável dependente a *quantidade de movimento*, $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, obtém-se a equação vectorial de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = F(t, \mathbf{r}) \end{cases}$$

1.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Como exemplo, escrevemos a mais simples equação diferencial de 1ª ordem, no caso escalar:

$$y' = g(t).$$

A solução geral desta equação, que se obtém por primitivação, é

$$y(t) = \int g(t)dt + C,$$

estando bem definida em qualquer intervalo onde g é contínua. Note-se que existe uma infinidade de soluções para a equação diferencial; o mesmo se passa com qualquer equação diferencial ordinária de 1ª ordem, $y' = f(t, y)$, desde que f seja uma função contínua num conjunto aberto.

Acrescentando à equação de 1ª ordem uma *condição inicial*, obtém-se um *problema de valor inicial* (ou *problema de Cauchy*):

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Em certas condições (veremos isso mais tarde) um problema de valor inicial tem solução única.

O *intervalo máximo de solução*, I_{max} , do problema de valor inicial é o “maior intervalo” onde o problema (1.45) tem solução. Mais exactamente, I_{max} é o intervalo maximal de existência de solução ¹.

¹O intervalo I_{max} diz-se maximal no sentido em que existe uma solução de (1.45) em I_{max} e qualquer outro intervalo onde uma solução de (1.45) está definida está contido em I_{max} .

1.2 Equações Escalares de Primeira Ordem

1.2.1 Determinação da Solução Geral

Muitos métodos de determinação da solução geral de equações diferenciais escalares de 1ª ordem baseiam-se na redução da equação a uma igualdade do tipo

$$\frac{d}{dt}(G(t, y(t))) = g(t), \quad (1.3)$$

onde $G = G(t, y)$, $g = g(t)$ e a derivada no 1º membro da equação é uma derivada total em ordem a t . Por primitivação, a solução geral de (1.3), escrita na forma implícita, é:

$$G(t, y(t)) = \int g(t)dt + C$$

1.2.2 Equações Lineares

Uma equação escalar de primeira ordem diz-se *linear*, se pode ser escrita na forma

$$\dot{y} + a(t)y = b(t) \quad (1.4)$$

A equação diz-se homogénea se $b(t) \equiv 0$. Nesse caso, ela é equivalente a

$$\frac{y'}{y} = -a(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\log |y|) = -a(t)$$

Primitivando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \log |y| = -\int a(t)dt + C &\Leftrightarrow |y| = e^C \exp\left(-\int a(t)dt\right) \\ &\Leftrightarrow y(t) = \pm D \exp\left(-\int a(t)dt\right) \end{aligned}$$

onde $D = e^C > 0$. Fazendo $K = \pm D$ e notando que $y(t) \equiv 0$ também é solução, obtemos a solução geral da equação linear homogénea

$$y(t) = K \exp\left(-\int a(t)dt\right), \quad t \in I$$

onde I é qualquer intervalo aberto onde $a(t)$ é contínua e $K \in \mathbb{R}$.

Resolvamos agora a equação não homogénea. Multiplicando a equação (1.4) por uma função $\mu(t)$ tal que $\dot{\mu} = a(t)\mu$, por exemplo, tomando

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right)$$

obtém-se a equação equivalente ²:

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu\dot{y} + \dot{\mu}y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mu y) = \mu(t)b(t)$$

²As equações são equivalentes pois $\mu(t) = e^{\int a(t)dt} \neq 0$, para qualquer t

Assim, a solução geral de (1.4) é dada pela expressão:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)b(t)dt + C \right]$$

Teorema: (Existência de solução de um PVI com equação linear)

Seja $I \subset \mathbb{R}$, a e b funções contínuas em I e $t_0 \in I$. Então, para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, o PVI

$$\begin{cases} \dot{y} + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solução única

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)b(s)ds + \mu(t_0)y_0 \right]$$

definida para todo $t \in I$.

Exemplo

- (1) Determinar a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de existência de solução:

$$\begin{cases} \dot{w} + w = e^{-2t} \\ w(0) = 3 \end{cases}$$

A equação $\dot{w} + w = e^{-2t}$ é linear, com $a(t) \equiv 1$ e $b(t) = e^{-2t}$ obviamente contínuas em \mathbb{R} . Um factor integrante (em $I = \mathbb{R}$) para a equação é:

$$\mu(t) = e^{\int 1 dt} = e^t$$

Sendo assim

$$\dot{w} + w = e^{-2t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^t w) = e^{-t} \Leftrightarrow w(t) = e^{-t}(-e^{-t} + C), C \in \mathbb{R}$$

Dado que $w(0) = 3$ conclui-se que $C = 4$ e a solução do PVI é

$$w(t) = e^{-t}(-e^{-t} + 4)$$

O intervalo máximo de solução corresponde ao maior intervalo onde $y(t)$ está bem definida e é continuamente diferenciável. Neste caso, $I_{max} = \mathbb{R}$. Note que solução está definida (e é continuamente diferenciável) em $I = \mathbb{R}$, pois $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas em \mathbb{R} .

- (2) Determinar a solução do (PVI)

$$2xyy' + (1+x)y^2 = e^x, \quad x > 0 \text{ e } y(1) = 2$$

efectuando a mudança de variável $v = y^2$.

Usando a sugestão, sendo $v = y^2$ tem-se que $v' = (y^2)' = 2yy'$. Substituindo na equação

$$xv' + (1+x)v = e^x \Leftrightarrow v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)v = \frac{e^x}{x}$$

Trata-se de uma equação linear, com $a(x) = \frac{1}{x} + 1$ e $b(x) = \frac{e^x}{x}$ obviamente contínuas para $x > 0$. Um factor integrante para a equação é:

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx} = xe^x$$

Sendo assim

$$v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)v = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow xe^x v' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)xe^x v = e^{2x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(xe^x v) = e^{2x}$$

pelo que

$$v(x) = \frac{e^{2x} + c}{xe^x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Dado que $v = y^2$, tem-se que

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = -\sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}}$$

tendo-se o primeiro caso se a condição inicial for positiva e o segundo se a condição inicial for negativa. Assim e dado que $y(1) = 2 > 0$, tem-se que a solução do (PVI) é

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + 4e - e^2}{xe^x}}$$

1.2.3 Equações Separáveis

Uma equação escalar de primeira ordem, diz-se *separável* se pode ser escrita na forma

$$f(y) \frac{dy}{dt} = g(t) \tag{1.5}$$

Para se poder encontrar a sua solução geral, é necessário que f e g estejam definidas e sejam contínuas em subconjuntos abertos de \mathbb{R} .

Se $F(y) = \int f(y)dy$ então:

$$\frac{d}{dt}F(y) = F'(y) \frac{dy}{dt} = f(y) \frac{dy}{dt} = g(t).$$

Em consequência, a solução geral da equação (1.5) é dada implicitamente por

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt + C$$

Note que a equação anterior é da forma

$$\Phi(t, y) = C \quad \text{onde} \quad \Phi(t, y) = F(y) - \int g(t)dt$$

Considere-se uma condição inicial genérica, $y(t_0) = y_0$. Se C for escolhido por forma a que (t_0, y_0) verifique a equação implícita, isto é, $C = \Phi(t_0, y_0)$, então o gráfico da solução do PVI é uma curva de nível da função $\Phi(t, y)$. Para ser possível definir uma função $S(t)$ tal que $y = S(t)$ seja

a única solução da equação implícita numa vizinhança de t_0 , isto é, para que, para (t, y) numa vizinhança de (t_0, y_0) ,

$$\Phi(t, y) = C \quad \Leftrightarrow \quad y = S(t)$$

então é obviamente necessário que a equação $\Phi(t, y) = C$ tenha uma e uma só solução pois, caso contrário, não se pode definir a função $S(t)$. Neste caso, $S(t)$ diz-se uma solução explícita (local) de $\Phi(t, y) = C$. Para poder concluir da existência de solução explícita local da equação, é útil o seguinte teorema:

Teorema da função implícita (em \mathbb{R}^2):

Seja $G : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(t_0, y_0) \in D$, $G(t_0, y_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0.$$

Então a equação

$$G(t, y) = 0$$

define uma única função y de classe C^1 numa vizinhança de t_0 tal que $y(t_0) = y_0$ e:

$$G(t, y(t)) = 0$$

para t nessa vizinhança.

No caso presente, temos $G(t, y) = \Phi(t, y) - C$, pelo que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Phi - C)(t_0, y_0) = F'(y_0) = f(y_0).$$

Consequentemente, basta verificar que $f(y_0) \neq 0$ para garantir a existência de solução explícita do PVI numa vizinhança de t_0 .

Teorema: (Existência de solução (local) do PVI para a equação separável)

Sejam f e g funções reais de variável real contínuas em vizinhanças de y_0 e t_0 respectivamente. Se $f(y_0) \neq 0$, então o PVI

$$\begin{cases} f(y) \frac{dy}{dt} = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solução única definida numa vizinhança de t_0 . A solução é definida implicitamente pela equação

$$\int_{y_0}^y f(u) du = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

ou, equivalentemente,

$$\int f(y) dy - \int g(t) dt = C,$$

com C determinado pela condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Exemplo

(1) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(x-3) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Para determinar soluções tais que $y(t) \neq 0$, para qualquer t :

$$\frac{dy}{dx} = y(x-3) \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x-3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int \frac{1}{y} dy = x-3 \Leftrightarrow \log|y| = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{2} - 3x}, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}$$

(Note que $y(t) \equiv 0$ também é solução da equação diferencial). Atendendo a que $y(0) = 5$ tem-se que $K = 5$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = 5e^{\frac{x^2}{2} - 3x}$$

O domínio de diferenciabilidade da função y é \mathbb{R} , pelo que o intervalo máximo de existência de solução é $I_{\max} = \mathbb{R}$. (Observe-se também que $y(t) \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, pelo que as equivalências acima são sempre válidas).

(2) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Note-se em primeiro lugar que a equação $\frac{dy}{dx} = -3y$ admite a solução de equilíbrio (ou constante) $y(x) \equiv 0$, mas esta solução só verifica a condição inicial no caso em que $y_0 = 0$. Para determinar soluções não constantes,

$$\frac{dy}{dx} = -3y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -3 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int \frac{1}{y} dy = -3 \Leftrightarrow \log|y| = -3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{-3x}$$

Atendendo a que $y(0) = y_0$ tem-se que $K = y_0$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = y_0 e^{-3x}$$

Na Figura (2.1) encontra-se o traçado de algumas destas soluções. Note-se, em particular, que a solução constante, $y(x) \equiv 0$, tem a seguinte propriedade:

1. Todas as outras soluções se aproximam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \rightarrow +\infty$.
2. Todas as outras soluções se afastam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \rightarrow -\infty$.

Devido à propriedade 1, dizemos que a solução $y(x) \equiv 0$ é assintoticamente estável quando $x \rightarrow +\infty$.

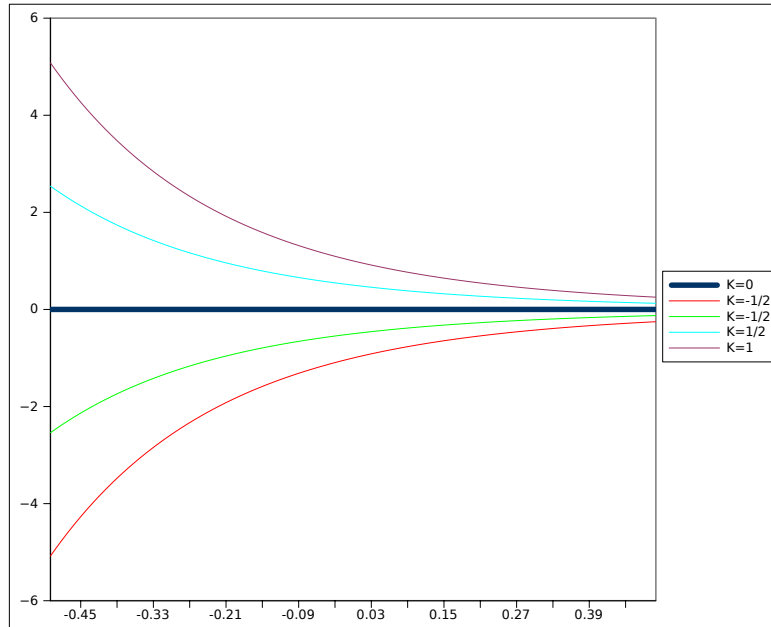


Figura 1.1: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e as soluções correspondentes a $y_0 = \pm 1/2$, $y_0 = \pm 1$.

1.2.4 Equações Exactas

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $M, N : A \rightarrow \mathbb{R}$. Uma equação diferencial do tipo

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1.6)$$

diz-se exacta se e só se é equivalente a

$$\frac{d}{dt} (\phi(t, y)) = 0, \quad (1.7)$$

onde $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 .

A solução geral, na forma implícita, da equação exacta é, então:

$$\phi(t, y) = C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Em que condições existe uma tal função ϕ , de forma a que a equação (1.6) seja equivalente a (1.7)? Começamos por notar que a equação (1.7) se pode escrever:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1.8)$$

Comparando a equação (1.6) com (1.8), concluímos que para (1.6) ser exacta é necessário e suficiente que:

$$M = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{e} \quad N = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

ou seja, $(M, N) = \nabla\phi$, para certa função $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$. Isto é equivalente a dizer que o campo (M, N) é um campo gradiente ³.

Exemplo: as equações separáveis, como vimos, podem-se escrever na forma

$$-g(t) + f(y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

onde $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas ⁴ são exactas. De facto, basta tomar um potencial $\phi : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\phi(t, y) = \int f(y)dy - \int g(t)dt.$$

Este exemplo não parece muito interessante, pois obtivemos o potencial a partir do conhecimento prévio da solução geral da equação exacta.

Problemas mais interessantes – no sentido em que não podem ser facilmente resolvidos por outros métodos – podem-se abordar tomando como ponto de partida a seguinte (e já vossa conhecida) condição necessária para que um campo seja gradiente.

Proposição: se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e simplesmente conexo, $M, N : A \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1 e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{em } A$$

então existe $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $(M, N) = \nabla\phi$. Em particular, isto implica que a equação $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ é exacta.

Exemplo

(1) Determinar a solução geral da equação

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = e^{4x} + 2xy^2 \quad \text{e} \quad N(x, y) = \cos y + 2x^2y$$

é fácil de verificar que

- (i) M e N são continuamente diferenciáveis em $U = \mathbb{R}^2$;
- (ii) $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial N}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Conclui-se que (M, N) é um campo gradiente em \mathbb{R}^2 , isto é, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = (M, N)$.

Cálculo de Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M \Rightarrow \Phi(x, y) = \int (e^{4x} + 2xy^2) dx + C(y) \Rightarrow \Phi(x, y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + C(y)$$

³ $(M, N) : A \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo gradiente com um potencial $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$.

⁴ $A, B \subset \mathbb{R}$ são conjuntos abertos

e, por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \Rightarrow 2x^2y + C'(y) = \cos y + 2x^2y \Rightarrow C(y) = \sin y + D$$

pelo que

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \sin y + D, \quad D \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2y) \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \sin y + D \right) = 0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \sin y = K, \quad K \in \mathbb{R}$$

1.2.5 Equações Redutíveis a Exactas

Qualquer equação escalar de primeira ordem é *redutível a exacta*, ou seja, pode ser transformada numa equação exacta, multiplicando-a por uma função $\mu(t, y)$ apropriada. A função μ denomina-se por um *factor integrante* da equação, e pode ser calculado resolvendo a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

No geral é impossível de obter uma solução (explícita) para esta equação. Pode ser resolvida nos casos em que o factor integrante, μ depende apenas de uma variável.

- A equação diferencial

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

é redutível a exacta, com factor integrante só dependendo de t , $\mu = \mu(t)$, se a função

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

depender apenas de t . Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \mu$$

- A equação diferencial

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

é redutível a exacta, com factor integrante só dependendo de y , $\mu = \mu(y)$, se a função

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

depender apenas de y . Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \mu$$

Em qualquer dos casos, a solução da equação inicial será dada por

$$\Phi(t, y) = C$$

em que Φ satisfaz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu M \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N$$

Exemplos:

1. Considere a equação diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = 3x^2y + 2xy + y^3 \quad , \quad N(x, y) = x^2 + y^2$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em \mathbb{R}^2 (são funções polinomiais) e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2x + 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\mu + (x^2 + y^2)\mu\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. Pelo que

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\frac{\partial \mu}{\partial y} + (3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2 + y^2)\frac{\partial \mu}{\partial x} + 2x\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial \mu / \partial y = 0$) tem-se que

$$(3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2 + y^2)\mu'(x) + 2x\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3x^2 + 2x + 3y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 3$$

Pod-se então verificar que a equação $\mu'(x)/\mu(x) = 3$ é possível de resolver (o segundo membro **não depende** de y), e como tal o factor integrante é $\mu(x) = e^{3x}$.

Considere-se então a equação

$$e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) + e^{3x}(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

que por construção é exacta: observe-se que as funções $e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)$ e $e^{3x}(x^2 + y^2)$ são diferenciáveis em \mathbb{R}^2 , e

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{3x}(x^2 + y^2) \right]$$

Sendo assim $(\mu M, \mu N)$ é um campo gradiente em \mathbb{R}^2 , isto é, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \Phi = (\mu M, \mu N)$.

Cálculo de Φ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = M\mu &\Rightarrow \Phi(x, y) = \int \left[e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) \right] dx + C(y) \\ &\Rightarrow \Phi(x, y) = x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} + c(y) \end{aligned}$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N \Rightarrow (x^2 + y^2)e^{3x} + C'(y) = e^{3x}(x^2 + y^2) \Rightarrow C(y) = \text{const.}$$

pelo que

$$\Phi(x, y) = x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} + \text{const.}, \quad \text{const.} \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias

$$\begin{aligned} 3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3) + e^{3x}(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} + \text{const.} \right) = 0 \end{aligned}$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$x^2ye^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Considere a equação diferencial

$$y + (2xy - e^{-2y})\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = y, \quad N(x, y) = 2xy - e^{-2y}$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em \mathbb{R}^2 e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$y\mu + (2xy - e^{-2y})\mu\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. Pelo que

$$y\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu = (2xy - e^{-2y})\frac{\partial \mu}{\partial x} + 2y\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial\mu/\partial y = 0$) tem-se que

$$\mu = (2xy - e^{-2y})\mu'(x) + 2y\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}}$$

É fácil de verificar que a função $\frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}}$ não depende apenas da variável x , pelo que **não existe** factor de integração dependendo apenas de x .

Supondo agora que $\mu = \mu(y)$ (o que implica $\partial\mu/\partial x = 0$) tem-se que

$$y\mu' + \mu = 2y\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{2y - 1}{y}$$

Pode-se então verificar que a equação $\mu'(y)/\mu(y) = (2y - 1)/y$ é possível de resolver (o segundo membro **depende** apenas de y), e como tal o factor integrante é $\mu(y) = \frac{e^{2y}}{y}$.

Considere-se então a equação

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

que por construção é exacta: observe-se que as funções e^{2y} e $2xe^{2y} - \frac{1}{y}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, e

$$\frac{\partial}{\partial y} [e^{2y}] = \frac{\partial}{\partial x} \left[2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right]$$

Sendo assim $(\mu M, \mu N)$ é um campo gradiente em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (ou em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$), isto é, existe $\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\Phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \rightarrow \mathbb{R}$) tal que $\nabla\Phi = (\mu M, \mu N)$.

Cálculo de Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M\mu \Rightarrow \Phi(x, y) = \int [e^{2y}] dx + C(y) \Rightarrow \Phi(x, y) = xe^{2y} + c(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \mu N \Rightarrow 2xe^{2y} + C'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \Rightarrow C(y) = -\log|y| + \text{const.}$$

pelo que

$$\Phi(x, y) = xe^{2y} - \log|y| + \text{const.}, \quad \text{const.} \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias, para $y \neq 0$

$$\begin{aligned} y + (2xy - e^{-2y}) \frac{dy}{dx} = 0 &\Leftrightarrow e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(xe^{2y} - \log|y| + \text{const.}\right) = 0 \end{aligned}$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$xe^{2y} - \log|y| = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de ordem n . Equações Vectoriais.

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da forma

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right)$$

ou seja é uma equação que relaciona uma função, $y(t)$, e as suas primeiras n derivadas. A sua solução é uma função real pertencente ao espaço vectorial

$$C^n(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua e com todas as derivadas até à ordem } n \text{ contínuas}\}$$

que verifica a equação diferencial. A solução geral de uma equação diferencial de ordem n dependerá de n constantes arbitrárias. Um problema de valor inicial para esta equação será da forma

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, y''(t_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

No caso das equações de ordem 2 é também comum a resolução de *problemas de valor na fronteira*. Por exemplo no problema

$$\begin{cases} y''(t) = f\left(t, y(t), y'(t)\right) \text{ para } t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

são conhecidos os valores da função $y(t)$ na fronteira do domínio.

1.3.1 Equações Lineares de ordem n . Caso Homogéneo.

Uma equação de ordem $n \in \mathbb{N}$ diz-se *linear* se puder ser escrita na forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (1.9)$$

onde $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ e $b(t)$ são funções reais definidas e contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Exemplo: As equações de ordem 2

$$y'' + 5y' = e^t, \quad y'' - \frac{5}{t}y' = 1$$

são equações lineares, a equação de ordem 3

$$y''' = y y' y''$$

não é linear.

Nesta Secção estudaremos o caso homogéneo, isto é vamos resolver a equação (1.38) no caso em que $b(t) \equiv 0$,

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (1.10)$$

Iremos agora enunciar algumas propriedades importantes das soluções de (1.10).

Princípio da Sobreposição de Soluções

Se $u(t)$ e $v(t)$ são soluções (reais ou complexas) de (1.10), então $c_1u(t) + c_2v(t)$ é também solução de (1.10), para quaisquer constantes (reais ou complexas) c_1, c_2 .

Deixaremos a demonstração como um exercício.

É de notar que esta propriedade é consequência da linearidade da derivada, e é verificada por **todas** as equações lineares homogêneas (diferenciais ou de outro tipo).

Observe-se que a função nula, $y(t) \equiv 0$ é solução da equação (1.10). Atendendo ao Princípio da Sobreposição podemos concluir que o espaço de soluções da equação (1.10) é um subespaço linear de $C^n(\mathbb{R})$. Veremos no capítulo seguinte que se trata de um subespaço de dimensão n .

Assim sendo, a sua solução geral é da forma

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são constantes reais, e y_1, \dots, y_n são n soluções linearmente independentes da equação.

Com esta generalidade não há forma sistemática de determinar uma base para o espaço de soluções da equação linear homogênea.

1.3.2 Equações Lineares de Coeficientes Constantes. Caso Homogêneo.

Uma equação de ordem $n \in \mathbb{N}$ diz-se linear de coeficientes constantes, se puder ser escrita na forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = h(t) \quad (1.11)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n são constantes reais, e $b : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em I . Nesta secção estudaremos o caso homogêneo, isto é, vamos resolver a equação (1.11) no caso em que $h(t) \equiv 0$,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (1.12)$$

Usando a notação $Dy = y'$ (e consequentemente $D^2y = y''$, ..., $D^n = y^{(n)}$), a equação (1.12) pode ser escrita na forma

$$\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0 \right) y = 0$$

e definindo $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$, a equação pode ser escrita na forma abreviada

$$P(D)y = h(t)$$

É preciso notar que $P(D)$ é um operador, isto é, uma função cujo domínio é um conjunto de funções de classe C^n , sendo n o grau de P . O termo $P(D)$ designa um *polinómio diferencial* e em consequência da linearidade da derivada, demonstra-se que pode ser factorizado da mesma forma que um polinómio numérico. Por exemplo, se y é uma função de classe C^2 :

$$(D^2 - 4)y = (D - 2)(D + 2)y = (D + 2)(D - 2)y$$

Cálculo de uma base do espaço de soluções da equação

Dada a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \Leftrightarrow (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = 0$$

define-se o seu *polinómio característico* por

$$P(R) = R^n + a_{n-1}R^{n-1} + \dots + a_1R + a_0$$

Trata-se do polinómio real com os mesmos coeficientes do polinómio diferencial associado à equação diferencial. Tem-se então que, se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são raízes distintas do polinómio característico (reais ou pares de complexos conjugados) de multiplicidades m_1, \dots, m_k , respectivamente, então por factorização

$$P(R) = (R - \lambda_1)^{m_1} \dots (R - \lambda_k)^{m_k}$$

A equação (1.12) pode ser escrita na forma

$$(D - \lambda_1)^{m_1} \dots (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0 .$$

Teorema:

Se a e b são números (reais ou complexos) distintos e

$$y(t) \text{ é solução de } (D - a)^m y = 0 \text{ ou } y(t) \text{ é solução de } (D - b)^n y = 0$$

então

$$y(t) \text{ é solução de } (D - a)^m (D - b)^n y = 0$$

Pelo que (desde que os λ_j sejam distintos uns dos outros), iremos resolver as equações

$$(D - \lambda_1)^{m_1} y = 0 \quad , \quad \dots \quad , \quad (D - \lambda_k)^{m_k} y = 0 .$$

a fim de obter uma base para o espaço de soluções da equação (1.12).

- **Cálculo de uma base do espaço de soluções de $(D - \lambda)^m y = 0$ no caso em que λ é uma raiz real do polinómio característico.**

$m = 1$ Se a multiplicidade da raiz λ é 1, estamos a resolver a equação $(D - \lambda)y = 0$. Assim

$$y' - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \lambda \Leftrightarrow y(t) = ke^{\lambda t} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

e uma base do espaço de soluções de $(D - \lambda)y = 0$ é (por exemplo) $\langle e^{\lambda t} \rangle$.

Exemplo:

Resolver a equação $y'' - 4y = 0$. Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2 - 4)y = 0$. O polinómio característico associado à equação é $P(R) = R^2 - 4 = (R - 2)(R + 2)$. Então

$$(D^2 - 4)y = 0 \Leftrightarrow (D - 2)(D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D - 2)y = 0 \text{ ou } (D + 2)y = 0$$

Assim

- * uma base do espaço de soluções de $(D - 2)y = 0$ é $\langle e^{2t} \rangle$;
- * uma base do espaço de soluções de $(D + 2)y = 0$ é $\langle e^{-2t} \rangle$,

pelo que

- * uma base do espaço de soluções de $(D - 2)(D + 2)y = 0$ é $\langle e^{2t}, e^{-2t} \rangle$.

e a solução geral da equação $y'' - 4y = 0$ é $c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$m = 2$ Se a multiplicidade da raiz λ é 2, estamos a resolver a equação $(D - \lambda)^2y = 0$. Para resolver esta equação, vamos determinar uma base para as equações

$$v = (D - \lambda)y \quad \text{pelo que} \quad (D - \lambda)v = 0$$

Para $(D - \lambda)v = 0$ podemos considerar (caso $m = 1$) $v = e^{\lambda t}$. Assim, substituindo na outra equação obtemos $y' - \lambda y = e^{\lambda t}$ que teremos que resolver. Observe-se que se trata de uma equação linear de primeira ordem, em que $a(t) = -\lambda$, isto é, uma equação linear de coeficientes constantes. O seu factor integrante é $\mu(t) = e^{-\lambda t}$, e assim

$$y' - \lambda y = e^{\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t}(y' - \lambda y) = 1 \Leftrightarrow (e^{-\lambda t}y)' = 1 \Leftrightarrow y(t) = te^{\lambda t} + ce^{\lambda t}$$

e uma base do espaço de soluções de $(D - \lambda)^2y = 0$ é (por exemplo) $\langle e^{\lambda t}, te^{\lambda t} \rangle$.

Exemplo:

Resolver a equação $y'' - 9y' + 6y = 0$. Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2 - 6D + 9)y = 0$. O polinómio característico associado à equação é $P(R) = R^2 - 6R + 9 = (R - 3)^2$. Então

- * uma base do espaço de soluções de $(D - 3)^2y = 0$ é $\langle e^{3t}, te^{3t} \rangle$,

e a solução geral da equação $y'' - 6y' + 9y = 0$ é $c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$m = 3$ Se a multiplicidade da raiz λ é 3, estamos a resolver a equação $(D - \lambda)^3y = 0$. Para resolver esta equação, vamos determinar uma base para as equações

$$v = (D - \lambda)y \quad \text{pelo que} \quad (D - \lambda)^2v = 0$$

Para $(D - \lambda)^2v = 0$ podemos considerar (caso $m = 2$) $v = ae^{\lambda t} + bte^{\lambda t}$. Assim, substituindo na outra equação obtemos $y' - \lambda y = ae^{\lambda t} + bte^{\lambda t}$. Dado que o nosso estudo se destina apenas a determinar uma base do espaço de soluções, podemos considerar (por exemplo) $a = 0$ e $b = 1$. Pelo que iremos resolver $y' - \lambda y = te^{\lambda t}$. Mais uma vez, trata-se de uma equação linear de coeficientes constantes. O seu factor integrante é $\mu(t) = e^{-\lambda t}$, e assim

$$y' - \lambda y = te^{\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t}(y' - \lambda y) = t \Leftrightarrow (e^{-\lambda t}y)' = t \Leftrightarrow y(t) = \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} + ce^{\lambda t}$$

e uma base do espaço de soluções de $(D - \lambda)^3y = 0$ é (por exemplo) $\langle e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t} \rangle$.

Podemos então concluir (usando indução) que uma base do espaço de soluções da equação

$$(D - \lambda)^m y = 0$$

é por exemplo

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

1.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE ORDEM N .
EQUAÇÕES VECTORIAIS.

- **Cálculo de uma base do espaço de soluções de $(D - \lambda)^m y = 0$ no caso em que $\lambda = a + ib$ é uma raiz complexa do polinómio característico.**

Começamos por recordar que se $P(R)$ é um polinómio de coeficientes reais então

$$\text{se } P(a + ib) = 0 \quad \text{então} \quad P(a - ib) = 0$$

isto é, num polinómio de coeficientes reais as raízes complexas ocorrem em pares de conjugados. Então, se $(R - (a + ib))^m$ é um dos factores do polinómio característico, $(R - (a - ib))^m$ também será. Determinaremos em simultâneo as bases do espaço de soluções das equações

$$(D - (a + ib))^m y = 0 \quad \text{e} \quad (D - (a - ib))^m y = 0.$$

- $m = 1$** Se a multiplicidade das raízes $a + ib$ e $a - ib$ é 1, de forma idêntica ao caso real poderemos afirmar que uma base do espaço de soluções da equação $(D - (a + ib))y = 0$ é, por exemplo, $\langle e^{(a+ib)t} \rangle$ e uma base do espaço de soluções da equação $(D - (a - ib))y = 0$ é, por exemplo, $\langle e^{(a-ib)t} \rangle$. Obtivemos então $\langle e^{(a+ib)t}, e^{(a-ib)t} \rangle$ como sendo uma base complexa do espaço de soluções da equação $(D - (a + ib))(D - (a - ib))y = 0$. Atendendo ao princípio da sobreposição, as suas partes real e imaginária também são soluções da equação. Assim

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} \cos(bt) + ie^{at} \sin(bt) \quad , \quad e^{(a-ib)t} = e^{at} \cos(bt) - ie^{at} \sin(bt)$$

é fácil de concluir que, por exemplo, $\langle e^{at} \cos(bt), e^{at} \sin(bt) \rangle$ é uma base (real) do espaço de soluções da equação $(D - (a + ib))(D - (a - ib))y = 0$.

Exemplo:

Resolver a equação $y'' + 16y = 0$. Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2 + 16)y = 0$. O polinómio característico associado à equação é $P(R) = R^2 + 16 = (R - 4i)(R + 4i)$. Então Assim

- * uma base complexa do espaço de soluções de $(D - 4i)(D + 4i)y = 0$ é $\langle e^{4iit}, \langle e^{-4iit} \rangle$;

pelo que

- * uma base real do espaço de soluções de $(D - 4i)(D + 4i)y = 0$ é $\langle \cos(4t), \sin(4t) \rangle$.

e a solução geral da equação $y'' + 16y = 0$ é $c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

No caso geral, usando indução (e imitando o caso real), podemos concluir que uma base do espaço de soluções da equação

$$(D - (a + ib))^m (D - (a - ib))^m y = 0$$

é constituída pelas $2m$ soluções linearmente independentes

$$e^{at} \cos(bt) , te^{at} \cos(bt) , \dots , t^{m-1} e^{at} \cos(bt)$$

$$e^{at} \sin(bt) , te^{at} \sin(bt) , \dots , t^{m-1} e^{at} \sin(bt)$$

Exemplo 1:

Determinar a solução geral da equação

$$y''' + 4y'' + 4y' = 0 \quad (1.13)$$

Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^3 + 4D^2 + 4D)y = 0 \Leftrightarrow D(D+2)^2y = 0 \Leftrightarrow Dy = 0 \text{ ou } (D+2)^2y = 0$$

Uma solução da equação $Dy = 0$ é e^{0t} . Por outro lado a equação $(D+2)^2y = 0$ tem como soluções, por exemplo, e^{-2t} e te^{-2t} . Como tal a solução geral de (1.13) é

$$y(t) = c_1 + c_2e^{-2t} + c_3te^{-2t} \quad , \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2:

Determinar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad (1.14)$$

Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 2D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D - (-1 + i))(D - (-1 - i))y = 0$$

As soluções complexas da equação são $e^{(-1+i)t}$ e $e^{(-1-i)t}$, pelo que $\operatorname{Re} e^{(-1+i)t}$ e $\operatorname{Im} e^{(-1+i)t}$ serão soluções reais de (1.14). Assim, a solução geral de (1.14) é

$$y(t) = c_1e^{-t} \cos t + c_2e^{-t} \sin t \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3:

Determinar a solução do PVI

$$y'' + 8y' + 12y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \quad , \quad y'(0) = -14 \quad (1.15)$$

Começemos por determinar a solução geral da equação. Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 8D + 12)y = 0 \Leftrightarrow (D+2)(D+6)y = 0 \Leftrightarrow (D+6)y = 0 \text{ ou } (D+2)y = 0$$

Uma solução da equação $(D+6)y = 0$ é e^{-6t} . Por outro lado a equação $(D+2)y = 0$ tem como solução e^{-2t} . Como tal a solução geral da equação é dada por

$$y(t) = c_1e^{-6t} + c_2e^{-2t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -6c_1 - 2c_2 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalmente a solução de (1.15) é

$$y(t) = 2e^{-6t} + e^{-2t}$$

1.3.3 Equações Vectoriais Lineares — Caso Homogéneo

Como caso particular das equações que estudámos na secção anterior, vamos agora resolver a equação vectorial de primeira ordem, no caso linear, caso homogéneo. Isto é vamos resolver a equação

$$\mathbf{Y}'(t) = A(t)\mathbf{Y}(t) \tag{1.16}$$

com $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, isto é uma matriz $n \times n$, cujas entradas são funções reais de variável real.

A equação vectorial pode ser escrita na forma de sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + \dots + a_{nn}y_n(t) \end{cases}$$

Usando o método de substituição, em regra geral, esta equação pode ser reduzida a uma equação de ordem n , linear, homogénea numa das componentes y_i , $i = 1, \dots, n$. Observe-se que se as funções $a_{ij}(t)$ forem constantes para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a equação de ordem n que se obtém ao resolver o sistema é também de coeficientes constantes.

Exemplo 1:

Determinar a solução geral da equação

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y$$

Fazendo $Y = (x, y)$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

Resolvendo (por exemplo) a primeira equação em ordem a y , obtém-se

$$y = -\frac{1}{3}(x' - x)$$

pele que, substituindo na segunda equação

$$\left(-\frac{1}{3}(x' - x)\right)' = 3x + \left(-\frac{1}{3}(x' - x)\right)$$

que é uma equação de segunda ordem (linear, de coeficientes constantes, homogénea) em x . Simplificando e resolvendo

$$x'' - 2x' + 10x = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 2D + 10)x = 0$$

O polinómio característico associado $P(R) = R^2 - 2R + 10$ tem raízes complexas conjugadas $1 \pm 3i$ pelo que uma base do espaço de soluções será (por exemplo) $\text{Re}e^{(1+3i)t}$ e $\text{Im}e^{(1+3i)t}$. Tem-se então que

$$x(t) = ae^t \cos(3t) + be^t \sin(3t)$$

e tornando a substituir

$$y = -\frac{1}{3}(x' - x) = -be^t \cos(3t) + ae^t \sin(3t)$$

Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a \cos(3t) + b \sin(3t) \\ -b \cos(3t) + a \sin(3t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Vamos agora determinar a solução geral da equação

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Neste caso não vamos conseguir reduzir o sistema a uma equação de ordem 3 em qualquer uma das variáveis, consequência de nas duas últimas equações não haver dependência em x e na primeira não haver dependência nas variáveis y e z . No entanto conseguiremos aplicar o método aos “sub-sistemas”

$$x' = 2x \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Para o primeiro

$$x' = 2x \Leftrightarrow x(t) = c_1 e^{2t}$$

Para o outro sistema, podemos utilizar dois métodos: ou reduzir a uma equação de ordem 2 (forçosamente em y) e resolvê-lo como no exemplo anterior, ou como método alternativo que resulta sempre que a matriz associada ao sistema é triangular, e que consiste em resolver a equação em z' (dado que só depende de z) substituir na equação em y' (dado que, conhecida z só depende de y). Assim

$$z' = 2z \Leftrightarrow z(t) = c_2 e^{2t}$$

Substituindo na equação em y'

$$y' = 2y + c_2 e^{2t} \Leftrightarrow y' - 2y = c_2 e^{2t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = c_2 \Leftrightarrow y(t) = e^{2t}(c_2 t + c_3)$$

e substituindo na equação em x' Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 t + c_3 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

1.4 Equações Vectoriais de 1ª Ordem (ou Sistemas)

Sendo $I \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ e, para $i = 1, \dots, n$, $f_i : I \times A \rightarrow \mathbb{R}$, denomina-se por *equação diferencial vectorial* de primeira ordem um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases}$$

1.4. EQUAÇÕES VECTORIAIS DE 1ª ORDEM (OU SISTEMAS)

onde as soluções são funções $y_1(t), \dots, y_n(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 em I . Utilizando notação vectorial, este sistema pode então ser escrito de forma abreviada como a equação vectorial

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

sendo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{bmatrix}$$

Tal como no caso escalar ($n = 1$), sendo $t_0 \in I$, denomina-se problema de valor inicial a

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) & , \quad t \in I \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

onde se supõe que $t_0 \in I$ e $Y_0 = (y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)) \in A$.

Função Vectorial, $F(t, Y)$, diferenciável relativamente a Y

Uma função vectorial, $F(t, Y) : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua em D , diz-se *diferenciável relativamente a Y* em D , se cada uma das funções escalares $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, tiver derivadas parciais contínuas relativamente a y_1, \dots, y_n em D .

Funções matriciais

No seguimento, será necessário estudar funções X cujo domínio é um intervalo real e cujo conjunto de chegada é um espaço vectorial de matrizes reais (ou complexas) de dimensão $n \times m$, que aqui denotaremos por $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ (ou \mathbb{C}).

Genericamente, um função $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, com

$$X(t) = \left[x_{ij}(t) \right]_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}}$$

pode, de facto, ser interpretada como uma função vectorial com as $n \times m$ componentes:

$$x_{11}(t), \dots, x_{1m}(t), x_{21}(t), \dots, x_{2m}(t), \dots \dots, x_{n1}(t), \dots, x_{nm}(t).$$

Sendo assim, pode-se neste contexto utilizar os conceitos e resultados já discutidos quando se estudou as funções vectoriais. A derivada de $X(t)$ é, então, dada por

$$\frac{dX}{dt} = \left[\frac{dx_{ij}}{dt} \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1 \dots m}},$$

e está bem definida se as funções componentes forem diferenciáveis em I . Analogamente, o integral de X entre $t_0, t \in I$ é dado por:

$$\int_{t_0}^t X(s) ds = \left[\int_{t_0}^t x_{ij}(s) ds \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1 \dots m}},$$

sempre que as funções componentes sejam seccionalmente contínuas em I . Desta forma, a *linearidade* da derivada e do integral ficam asseguradas.

Relativamente à derivada do produto de duas matrizes,

$$X(t) = \left[x_{ik}(t) \right]_{\substack{i=1\dots n \\ k=1\dots m}} \quad \text{por} \quad Y(t) = \left[y_{kj}(t) \right]_{\substack{k=1\dots m \\ j=1\dots k}} ,$$

o resultado tem que ser deduzido (porquê?). No entanto isso, é tarefa relativamente fácil: calculando a derivada da componente (i, j) de $X(t)Y(t)$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^m x_{ik}(t)y_{kj}(t) = \sum_{k=1}^m x'_{ik}(t)y_{kj}(t) + \sum_{k=1}^m x_{ik}(t)y'_{kj}(t) ,$$

Resulta assim que

$$(X(t)Y(t))' = X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t).$$

1.4.1 Equações Vectoriais Lineares

A equação vectorial denomina-se *linear* se a função $F(t, Y)$ for linear em Y , isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y'_1(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial:

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \tag{1.17}$$

sendo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Caso Homogéneo e Matriz Solução Fundamental

Fazendo $B(t) \equiv 0$ na equação (1.17), obtém-se a equação linear homogénea associada

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \tag{1.18}$$

com $Y \in \mathbb{R}^n$ e $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, onde as funções $a_{ij}(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas.

Definição (Matriz Solução Fundamental): Uma matriz $S(t)$ denomina-se matriz solução fundamental de (1.18) se e só se

- (i) $\det S(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, o que significa que as colunas de $S(t)$ são linearmente independentes ($S(t)$ é não singular) para qualquer $t \in I$;
- (ii) as colunas de $S(t)$ são soluções da equação $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Exemplo:

No Exemplo 1 da Secção 2.4.1, resolvemos a equação vectorial

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y \quad (1.19)$$

tendo obtido como solução

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a \cos(3t) + b \operatorname{sen}(3t) \\ -b \cos(3t) + a \operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & \operatorname{sen}(3t) \\ \operatorname{sen}(3t) & -\cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(t)C,$$

É agora fácil de verificar que a matriz $S(t)$ acima definida é uma matriz solução fundamental associada à equação (1.19). De facto

(i) A matriz $\mathbf{S}(t)$ é não singular em \mathbb{R} , pois

$$\det \mathbf{S}(t) = -1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ii) Verifica-se que $Y'_i(t) = AY_i(t)$, $i = 1, 2$ em que $Y_i(t)$ representa a coluna i de $\mathbf{S}(t)$. De facto, para $i = 1$

$$Y'_1(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^t \cos(3t) \\ e^t \operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos(3t) - 3 \operatorname{sen}(3t)) \\ e^t(\operatorname{sen}(3t) + 3 \cos(3t)) \end{bmatrix}$$

e

$$AY_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \cos(3t) \\ e^t \operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos(3t) - 3 \operatorname{sen}(3t)) \\ e^t(\operatorname{sen}(3t) + 3 \cos(3t)) \end{bmatrix}$$

enquanto que para $i = 2$

$$Y'_2(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^t \operatorname{sen}(3t) \\ -e^t \cos(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(3 \cos(3t) + \operatorname{sen}(3t)) \\ e^t(3 \operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) \end{bmatrix}$$

e

$$AY_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \operatorname{sen}(3t) \\ -e^t \cos(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\operatorname{sen}(3t) + 3 \cos(3t)) \\ e^t(3 \operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) \end{bmatrix}$$

Observe-se que não há uma única matriz solução fundamental da equação — por exemplo, se $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental qualquer matriz obtida por troca de colunas de $\mathbf{S}(t)$ é também uma matriz solução fundamental.

Exemplo: No problema anterior, a solução também pode ser escrita na forma:

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a \cos(3t) + b \operatorname{sen}(3t) \\ -b \cos(3t) + a \operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(3t) & \cos(3t) \\ -\cos(3t) & \operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}_1(t)C$$

pelo que $\mathbf{S}_1(t)$ é também uma matriz solução fundamental. (A verificação é óbvia).

Proposição (*Caracterização da Matriz Solução Fundamental*): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (1.18) se e só se:

(i) Existe um $t_0 \in I$ tal que $S(t_0)$ é não singular.

$$(ii) \mathbf{S}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{S}(t)$$

Demonstração: (ii) é apenas outra forma de escrever a alínea (ii) da definição de $\mathbf{S}(t)$. Quanto a (i), suponhamos que existe um $\hat{t} \in I$ tal que $\mathbf{S}(\hat{t})$ é singular, isto é, para certo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = \mathbf{0}$, e derivemos uma contradição. Como

$$\mathbf{S}'(t)\mathbf{b} = \mathbf{A}(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{b}; ,$$

Considerando $Y(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{b}$ então das equações anteriores:

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(\hat{t}) = \mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Por unicidade de solução deste PVI, $Y(t) \equiv 0$. Conclui-se então que $\mathbf{S}(t)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ para todo o $t \in I$, pelo que $\mathbf{S}(t)$ é singular para todo o $t \in I$; logo, em particular, também $\mathbf{S}(t_0)$ é singular, o que contradiz a hipótese. \square

Como corolário da proposição anterior, obtemos:

Teorema (Matriz Solução Fundamental): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (1.18) se e só se é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{S}' = \mathbf{A}\mathbf{S} \\ \mathbf{S}(\mathbf{0}) = \mathbf{S}_0 \end{cases}$$

para alguma matriz não singular, $\mathbf{S}_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo: Para obter uma matriz solução fundamental, $\mathbf{S}(t)$, da equação $Y' = A(t)Y$, podemos resolver os n problemas

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(t_0) = \mathbf{e}_i \end{cases} \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$ são os vectores da base canónica de \mathbb{R}^n . As colunas de $\mathbf{S}(t)$ serão as soluções desses n problemas.

Resulta da definição que a matriz $\mathbf{S}(t)$ é invertível para todo o t . Sendo assim

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t)) = \mathbf{S}'(t)\mathbf{S}^{-1}(t) + \mathbf{S}(t)\frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)),$$

pelo que $\mathbf{S}(t)\frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)) = -\mathbf{S}'(t)\mathbf{S}^{-1}(t)$. Desta forma:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)) = -\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{S}'(t)\mathbf{S}^{-1}(t)$$

Atendendo a que $\mathbf{S}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{S}(t)$ implica $A(t) = \mathbf{S}'(t)\mathbf{S}^{-1}(t)$, então a inversa da matriz solução fundamental verifica:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{S}^{-1}(t)) = -\mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{A}(t) \tag{1.20}$$

Caracterização das Soluções da Equação Homogénea

Teorema: Considere-se $I \subset \mathbb{R}$ e $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, com $a_{ij}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, e o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (1.21)$$

onde $t_0 \in I$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Seja $\mathbf{S}(t)$ uma matriz solução fundamental da equação diferencial. Então o problema (1.21) tem uma única solução dada por $Y(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{Y}_0$. Além disso, as soluções da equação diferencial formam um espaço vectorial de dimensão n , sendo uma sua base constituída pelas colunas de $S(t)$; ou seja, a sua solução geral é:

$$Y(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{C} \quad \text{com} \quad \mathbf{C} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

Demonstração: Seja $Y(t)$ uma solução arbitrária da equação $Y' = A(t)Y$ e considere-se $z(t) = \mathbf{S}^{-1}(t)Y(t)$. Queremos mostrar que $z(t)$ é constante. Então, usando a equação (1.20):

$$\begin{aligned} z'(t) &= (\mathbf{S}^{-1}(t))' Y(t) + \mathbf{S}^{-1}(t) Y'(t) \\ &= -\mathbf{S}^{-1}(t) \mathbf{A}(t) Y(t) + \mathbf{S}^{-1}(t) Y'(t) \\ &= \mathbf{S}^{-1}(t) (Y'(t) - \mathbf{A}(t) Y(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Temos então que $\mathbf{S}^{-1}(t)Y(t) = z(t) = C$, com $C \in \mathbb{R}^n$, o que nos permite concluir que:

- (1) a solução geral da equação diferencial é $Y(t) = S(t)C$;
- (2) se $Y(t_0) = Y_0$ então $C = \mathbf{S}^{-1}(t_0)Y(t_0) = \mathbf{S}^{-1}(t_0)Y_0$, pelo que a solução do PVI (1.21) é $Y(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{Y}_0$.

□

1.4.2 Equações vectoriais Lineares — Caso Não Homogéneo

Dada uma matriz solução fundamental de $Y' = A(t)Y$, pretendemos obter as soluções da equação não homogénea $Y' = A(t)Y + B(t)$

Teorema (Fórmula de Variação das Constantes): Sendo $A = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$, com componentes $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, $\mathbf{b} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ também contínua, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $S(t)$ uma matriz solução fundamental de $Y' = A(t)Y$, então a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + \mathbf{b}(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

é dada pela fórmula de variação das constantes:

$$Y(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)Y_0 + \mathbf{S}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \quad (1.23)$$

Demonstração: Escrevendo a equação diferencial (1.22) na forma $Y' - A(t)Y = \mathbf{b}(t)$, e multiplicando ambos os membros por $S^{-1}(t)$, obtém-se:

$$S^{-1}(t)Y' - S^{-1}(t)A(t)Y = S^{-1}(t)\mathbf{b}(t)$$

Atendendo a que $(S^{-1}(t))' = -S^{-1}(t)A(t)$ (equação (1.20)), resulta pois que

$$S^{-1}(t)Y' + (S^{-1}(t))'(t)Y = S^{-1}(t)\mathbf{b}(t),$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}(S^{-1}(t)Y(t)) = S^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \quad (1.24)$$

Integrando entre t_0 e t , e considerando que $Y(t_0) = y_0$, temos que:

$$S^{-1}(t)Y(t) - S^{-1}(t_0)Y_0 = \int_{t_0}^t S^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds$$

Multiplicando agora à direita por $S(t)$ obtém-se:

$$Y(t) - S(t)S^{-1}(t_0)Y_0 = S(t) \int_{t_0}^t S^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds.$$

□

Corolário (Fórmula de Variação das Constantes para a Solução Geral): Nas mesmas condições do teorema anterior, a solução geral da equação

$$Y' = A(t)Y + \mathbf{b}(t)$$

é dada por:

$$Y(t) = \mathbf{S}(t)C + \mathbf{S}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds, \quad C \in \mathbb{R}^n; \quad (1.25)$$

(onde $\int_{t_0}^t \mathbf{x}(s)ds$ representa uma primitiva da função vectorial $\mathbf{x}(t)$).

Demonstração: Repita a prova do teorema anterior, primitivando ambos os membros da igualdade (1.24) em vez de os integrar entre t_0 e t (exercício). Note que a constante de primitivação, C , pertence a \mathbb{R}^n . □

Exemplo:

Determine a solução da equação

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Começemos por determinar uma matriz solução fundamental, resolvendo o sistema homogéneo associado

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{bmatrix} Y \Leftrightarrow \begin{cases} x' = tx + y \\ y' = -t^2x - ty \end{cases}$$

1.4. EQUAÇÕES VECTORIAIS DE 1ª ORDEM (OU SISTEMAS)

onde $Y = (x, y)$. Pela primeira equação $y = x' - tx$, pelo que substituindo na segunda equação

$$(x' - tx)' = -t^2x - t(x' - tx) \Leftrightarrow x'' - tx' - x = -t^2x - tx' + t^2x \Leftrightarrow x'' - x = 0$$

Fazendo $Dx = x'$ esta última equação pode ser escrita na forma $(D^2 - 1)x = 0$ e então é fácil de concluir que

$$x(t) = ae^t + be^{-t}$$

e conseqüentemente

$$y = x' - tx = ae^t - be^{-t} - ate^t - bte^{-t}$$

Obtem-se a solução (da equação homogénea

$$Y_H(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^t + be^{-t} \\ ae^t - be^{-t} - ate^t - bte^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

E a matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental. Podemos então aplicar a fórmula da variação das constantes para obter a solução da equação (1.26)

$$\begin{aligned} Y(t) &= S(t)C + S(t) \int S^{-1}(t)B(t)dt \\ &= S(t) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + S(t) \int \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t}(1+t) & e^{-t} \\ e^t(1+t) & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= S(t) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} S(t) \begin{bmatrix} \int e^{-t} dt \\ -\int e^t dt \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae^t + be^{-t} - 1 \\ a(1+t)e^t + b(-1-t)e^{-t} + t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.4.3 Equações Vectoriais Lineares de Coeficientes Constantes:

A equação vectorial linear denomina-se *de coeficientes constantes* se a matriz $A(t)$ tiver entradas constantes, isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + \dots + a_{nn}y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial,

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \tag{1.27}$$

sendo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Caso Homogéneo

Tal como anteriormente, o caso homogéneo corresponde a tomar $B(t) \equiv 0$ na equação (1.27). Vamos assim estudar a equação

$$Y'(t) = AY(t) \quad (1.28)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exponencial de uma Matriz

Dados uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, convencionamos-se que:

$$A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I,$$

onde I representa a matriz identidade de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Recordamos o problema de valor inicial escalar,

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

tem por única solução $y(t) = e^{at}$. Procedendo por analogia, definimos a exponencial de tA , que denotamos por e^{tA} , da forma que se segue.

Definição (Exponencial de uma Matriz): Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Então e^{At} é a (única) matriz solução fundamental de (1.28) que é igual à matriz identidade em $t = 0$. Isto equivale a dizer que $X(t) = e^{At}$ é a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = I \end{cases} \quad (1.29)$$

Resulta imediatamente da definição anterior que:

Proposição: Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e S é uma matriz solução fundamental de $Y' = AY$ então:

$$e^{tA} = S(t)S^{-1}(0)$$

Exemplo 3:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, pretendemos calcular e^{At} para $t \in \mathbb{R}$. Revisitando o Exemplo 1 da secção 2.4.1 (resolução da equação diferencial (1.19)), e concluímos num exemplo posterior que uma matriz solução fundamental é

$$S(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ \sin(3t) & -\cos(3t) \end{bmatrix}$$

1.4. EQUAÇÕES VECTORIAIS DE 1ª ORDEM (OU SISTEMAS)

No entanto, e dado que $S(0) \neq Id_2$, $S(t)$ não é e^{At} . Mas pela proposição anterior

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & \text{sen}(3t) \\ \text{sen}(3t) & -\cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & -\text{sen}(3t) \\ \text{sen}(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix}$$

Note que a exponencial da matriz tA , $\mathbf{X}(t)$, tem uma propriedade importante — é a *única matriz solução fundamental que verifica* $\mathbf{X}(0) = I$.

Para obter soluções linearmente de $Y' = AY$, podemos usar o seguinte resultado.

Proposição: Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de A e $V \in \mathbb{C}^n$ um vector próprio associado a λ então $Y(t) = e^{t\lambda}V$ é uma solução da equação $Y' = AY$. Além disso, $\mathbf{u} = \text{Re } Y$ e $\mathbf{v} = \text{Im } Y$ são soluções reais de $Y' = AY$.

Demonstração: Para provar a primeira parte, basta ver que:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{t\lambda}V) = e^{t\lambda} \lambda V = e^{t\lambda} AV = A(e^{t\lambda}V) = AY(t).$$

Tendo em conta que

$$(\mathbf{u} + i\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + i\mathbf{v}' = A\mathbf{u} + iA\mathbf{v} = A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}),$$

tomando a parte real e parte imaginária em ambos os membros desta igualdade obtém-se $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$. □

Se A for uma matriz $n \times n$ real diagonalizável, então existe um conjunto de n vectores próprios de A linearmente independentes V_1, V_2, \dots, V_n . Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ forem os respectivos valores próprios associados, podemos construir uma matriz solução fundamental — e daí obter e^{At} — colocando nas colunas de S as soluções de $Y' = AY$ dadas pela proposição anterior; isto é:

$$e^{\lambda_1 t}V_1, e^{\lambda_2 t}V_2, \dots, e^{\lambda_n t}V_n.$$

Note que $S(0)$ é não singular.

Se λ for um valor próprio complexo de uma matriz real A , com vector próprio associado $V \in \mathbb{C}^n$, então o procedimento anterior dá-nos uma matriz solução fundamental complexa; no entanto, podemos utilizar as funções reais $\text{Re } e^{\lambda t}V$ e $\text{Im } e^{\lambda t}V$, no lugar de $e^{\lambda_1 t}V$ e $e^{\bar{\lambda}_1 t}\bar{V}$ ⁵

Série da Exponencial de uma Matriz

Para encontrar um desenvolvimento em série para a exponencial de At , procuremos uma solução da equação (1.29) através das iteradas de Picard:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_{n+1}(t) &= I + \int_{t_0}^t AX_n(s) ds \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

⁵Se A é uma matriz real, então $\bar{A} = A$. Se (λ, V) é um par valor próprio, vector próprio (complexo) de A , então $(\bar{\lambda}, \bar{V})$ é também um par valor próprio, vector próprio de A , pois $A\bar{V} = \bar{A}\bar{V} = \bar{A}\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V}$. Neste caso, $\text{Re } e^{\lambda t}\bar{V} = \text{Re } e^{\lambda t}V$ e $\text{Im } e^{\lambda t}\bar{V} = -\text{Im } e^{\lambda t}V$. Por cada par de vectores próprios conjugados, V e \bar{V} , produzem-se desta forma duas (não quatro!) funções reais linearmente independentes, $\text{Re } e^{\lambda t}V$ e $\text{Im } e^{\lambda t}V$.

Calculando as primeiras 3 iterações, obtém-se:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_1(t) &= I + \int_{t_0}^t A ds = I + tA \\ X_2(t) &= I + \int_{t_0}^t (A + sA^2) ds = I + \int_{t_0}^t A ds + \int_{t_0}^t sA^2 ds = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \\ X_3(t) &= I + \int_{t_0}^t \left(A + sA^2 + \frac{s^2}{2}A^3 \right) ds = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 \end{aligned}$$

Resulta então que⁶:

$$X_n(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n$$

Isto sugere que a forma da solução de (1.29) é o “limite” da expressão anterior, ou seja:

$$X(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n.$$

Esta fórmula é análoga à que define a série de McLaurin da função exponencial, $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$, para $a, t \in \mathbb{R}$. No nosso caso trata-se de uma série de potências de matrizes onde, em cada termo, aparece tA no lugar de ta . Isto leva-nos a conjecturar o seguinte:

Teorema (Série da Exponencial de uma Matriz): Sendo A uma matriz $n \times n$ de componentes reais e $t \in \mathbb{R}$, a exponencial de tA , e^{tA} , é dada por:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots \quad (1.30)$$

Além disso, a série (1.30) converge uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R, R]$ (para qualquer $R > 0$) e verifica $Ae^{At} = e^{At}A$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Para provar este teorema, precisaremos em primeiro lugar de saber produzir estimativas de matrizes. Sendo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, consideramos:

$$\|A\| = n \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|.$$

Note que qualquer componente a_{ij} de A verifica:

$$|a_{ij}| \leq \frac{1}{n} \|A\|. \quad (1.31)$$

De facto, esta função tem as propriedades de uma norma⁷; mas vamos aqui apenas provar a propriedade de $\|A\|$ de que efectivamente precisamos.

⁶Pode-se facilmente provar este resultado por indução. No entanto, neste contexto isso será desnecessário, pois estamos apenas a usar as iteradas de Picard para formular uma conjectura cuja veracidade será depois comprovada por outro método.

⁷É fácil provar que para quaisquer duas matrizes reais, A, B , de dimensão $n \times n$, se tem: **(a)** $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$; **(b)** $\|cA\| = |c| \|A\|$, para $c \in \mathbb{R}$; **(c)** $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; **(d)** $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

1.4. EQUAÇÕES VECTORIAIS DE 1ª ORDEM (OU SISTEMAS)

Se $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n$ é outra matriz real, então as componentes do produto AB verificam:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \|A\| \|B\| = \frac{1}{n} \|A\| \|B\|$$

Ou seja, o módulo de cada componente de AB é majorado pelo mesmo valor: $\frac{1}{n} \|A\| \|B\|$. Desta forma:

$$\|AB\| \leq n \left(\frac{1}{n} \|A\| \|B\| \right) = \|A\| \|B\|$$

Pela desigualdade anterior, $\|A^k\| \leq \|A\| \|A^{k-1}\| \leq \|A\|^2 \|A^{k-2}\| \leq \dots \leq \|A\|^k$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. Como também $\|A^0\| = \|I\| = 1 = \|A\|^0$, resulta pois que:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

Passamos agora à demonstração da convergência da série. Para tal, basta provar que todas as componentes da soma da série (1.30) existem (em \mathbb{R}).

Sendo $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e denotando cada componente (i, j) de A^k por $a_{ij}^{(k)}$, então as componentes de e^{At} são as somas das séries reais ⁸:

$$\delta_{ij} + ta_{i,j} + \frac{t^2}{2!} a_{ij}^{(2)} + \dots + \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)} \quad \text{com } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.33)$$

Vamos agora provar a convergência uniforme destas séries, para t num intervalo do tipo $[-R, R]$, com $R > 0$. Para $|t| \leq R$, e usando (1.31) e (1.32), podemos majorar cada um dos termos das séries anteriores como se segue:

$$\left| \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)} \right| = \frac{|t|^k}{k!} |a_{ij}^{(k)}| \leq \frac{R^k}{k!} |a_{ij}^{(k)}| \leq \frac{R^k}{k!} \frac{\|A^k\|}{n} \leq \frac{R^k}{k!} \frac{\|A\|^k}{n} = \frac{(\|A\|R)^k}{n k!}$$

Como a série real

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\|R)^k}{k!}$$

é convergente — a sua soma é $\frac{1}{n} e^{\|A\|R}$ — então, pelo critério de Weierstrass, as séries (1.33) convergem uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R, R]$; isto vale para qualquer $R > 0$. Em particular, as séries (1.33) convergem pontualmente para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Isto prova que e^{tA} está bem definida por (1.30), é diferenciável em \mathbb{R} e pode ser derivada termo a termo.

Usando o resultado anterior, podemos agora calcular a derivada de e^{tA} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt} \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots \right) \\ &= 0 + A + \frac{2t}{2!} A^2 + \frac{3t^2}{3!} A^3 + \dots + \frac{nt^{n-1}}{n!} A^n + \dots \\ &= A \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots \right) = A e^{tA} \\ &= \left(I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots \right) A = e^{tA} A \end{aligned}$$

⁸O símbolo δ_{ij} , designado na literatura por delta de Kronecker, representa as componentes da matriz identidade. Note que $a_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

Assim sendo:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$$

Note também que $e^{0A} = I$. Isto conclui a demonstração do teorema. \square

Algumas propriedades de e^{At}

Dado $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{i,j=1}^n(\mathbb{R})$, listamos aqui algumas das propriedades de e^{At} :

- (a) e^0 é a matriz identidade em \mathbb{R}^n ;
- (b) $S(t) = e^{At}$ é a única matriz solução fundamental de $Y' = AY$ que verifica $S(0) = I$.
- (c) e^{At} é uma função diferenciável em qualquer $t \in \mathbb{R}$ e:

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = A e^{At} = e^{At} A$$

- (d) A matriz e^{At} é invertível para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

- (e) Se A, B são quaisquer matrizes $n \times n$ verificando $AB = BA$, então:

$$e^{At} B = B e^{At}$$

- (f) Se A, B são quaisquer matrizes $n \times n$ verificando $AB = BA$, então:

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$$

Demonstração:

- (d) Atendendo a que:

$$\frac{d}{dt} (e^{At} e^{-At}) = e^{At} A e^{-At} + e^{At} (-A) e^{-At} = e^{At} A e^{-At} - e^{At} A e^{-At} = 0,$$

então $e^{At} e^{-At}$ é constante. Em particular:

$$e^{At} e^{-At} = e^{A0} e^{-A0} = I^2 = I.$$

- (e) (Exercício)

- (f) Considere $X(t) = e^{At} e^{Bt}$. Então $X(0) = I$ e (usando (e)):

$$X'(t) = A e^{At} e^{Bt} + e^{At} B e^{Bt} = A e^{At} e^{Bt} + B e^{At} e^{Bt} = (A + B) e^{At} e^{Bt} = (A + B) X(t).$$

Isto prova que $X(t) = e^{(A+B)t}$. \square

1.4. EQUAÇÕES VECTORIAIS DE 1ª ORDEM (OU SISTEMAS)

Como consequência da teoria desenvolvida para o caso geral em que $A(t)$ é uma função matricial e as propriedades de e^{At} podemos deduzir o seguinte:

Teorema (Solução de uma equação vectorial linear de coeficientes constantes)

— **Caso Homogéneo**

Se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz $n \times n$, com $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

tem solução única, dada por:

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso, as soluções da equação $Y' = AY$ formam um espaço vectorial de dimensão n , sendo dadas por $Y(t) = e^{At}C$, onde $C \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo:

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

vamos determinar a matriz e^{At} e a solução do (PVI)

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = -x - 2y \\ z' = x + 2y \end{cases}, \quad (x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$$

Começemos por determinar uma matriz solução fundamental associada ao sistema (homogéneo). Assim

$$x' = 2x + 4y \Rightarrow y = \frac{x' - 2x}{4}$$

Substituindo na segunda equação, obtemos

$$y' = -x - 2y \Rightarrow \left(\frac{x' - 2x}{4}\right)' = -x - 2\left(\frac{x' - 2x}{4}\right) \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 + c_2t$$

Assim

$$y(t) = \frac{x' - 2x}{4} = \frac{c_2 - 2c_1 - 2c_2t}{4} \quad \text{e} \quad z = \int (x + 2y)dt = \frac{c_2t}{2} + c_3$$

Então

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2t \\ \frac{c_2 - 2c_1 - 2c_2t}{4} \\ \frac{c_2t}{2} + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental associada ao sistema mas não é e^{At} (dado que para $t = 0$ não iguala a matriz identidade. Tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1+2t & 4t & 0 \\ -t & 1-2t & 0 \\ t & 2t & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a solução do (PVI) é dada por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t & 4t & 0 \\ -t & 1-2t & 0 \\ t & 2t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6t \\ 1-3t \\ 1+3t \end{bmatrix}$$

— **Caso Não Homogéneo** Se à equação

$$Y'(t) = AY(t) + \mathbf{b}(t) \tag{1.34}$$

com $Y \in \mathbb{R}^n$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{b} : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. aplicarmos a fórmula (1.25), concluímos que a solução geral da equação (1.34) é dada por

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At} \int^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds, \quad C \in \mathbb{R}^n$$

Se adicionalmente for dada a condição inicial $Y(t_0) = Y_0$, a solução do PVI será neste caso dada por

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds$$

para todo $t \in I$.

Exemplo:

Determinar a solução do PVI

$$Y' = AY + \mathbf{b}(t), \quad Y(0) = (1, -1, 0)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Vamos em primeiro lugar determinar a matriz e^{At} resolvendo o sistema homogéneo associado, isto é determinar a solução geral de

$$\begin{cases} x' = -2x + z \\ y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$$

1.4. EQUAÇÕES VECTORIAIS DE 1ª ORDEM (OU SISTEMAS)

Para tal, determinemos a solução do sistema em y e z , e conhecidas estas funções determinaremos a função x resolvendo a equação correspondente. Assim

$$\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z' + z)' = -3(z' + z) - z \\ y = z' + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z'' + 4z' + 4z = 0 \\ y = z' + z \end{cases}$$

O polinómio característico associado à equação (em z) é

$$P(R) = R^2 + 4R + 4 = (R + 2)^2$$

pelo que $z(t) = ae^{-2t} + bte^{-2t}$ e consequentemente

$$y = z' + z = (-a + b)e^{-2t} - bte^{-2t}$$

Finalmente, substituindo na equação em x

$$x' + 2x = ae^{-2t} + bte^{-2t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{2t}x) = a + bt \Leftrightarrow x = e^{-2t}\left(c + at + b\frac{t^2}{2}\right)$$

Tem-se então que a solução do sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_H = e^{-2t} \begin{bmatrix} c + at + b\frac{t^2}{2} \\ -a + b - bt \\ a + bt \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} t & \frac{t^2}{2} & 1 \\ -1 & 1 - t & 0 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \equiv S(t)C$$

e $S(t)$ é uma matriz solução fundamental. Então

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 - t & -t \\ 0 & t & 1 + t \end{bmatrix}$$

Assim, a solução da equação é dada pela fórmula da variação das constantes (versão com a exponencial da matriz A)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds \\ &= e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{2s} \begin{bmatrix} 1 & \frac{s^2}{2} & -s + \frac{s^2}{2} \\ 0 & 1 + s & s \\ 0 & -s & 1 - s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) + 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \\ -1 + t - t^2 \\ t + t^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.4.4 Cálculo de uma Matriz Solução Fundamental no caso A diagonalizável

Uma matriz A , $n \times n$, diz-se *diagonalizável* se admite n vectores linearmente independentes. Observa-se que, se a matriz A admitir n valores próprios distintos então A é necessariamente diagonalizável. Se A admite valores próprios repetidos (com multiplicidade algébrica, m_a , maior do que 1), a matriz será diagonalizável se a multiplicidade geométrica, m_g , for igual a m_a , e não será diagonalizável se a multiplicidade geométrica, m_g , for menor do que m_a .

No caso em que a matriz é diagonalizável, podemos obter soluções linearmente independentes de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ usando o seguinte resultado.

Proposição: Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de A e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ um vector próprio associado a λ então $Y(t) = e^{t\lambda}\mathbf{v}$ é uma solução da equação $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Além disso, $\mathbf{u} = \operatorname{Re} \mathbf{y}$ e $\hat{\mathbf{u}} = \operatorname{Im} \mathbf{y}$ são soluções reais de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Demonstração: Para provar a primeira parte, basta ver que:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = e^{\lambda t}\lambda\mathbf{v} = e^{\lambda t}A\mathbf{v} = A(e^{\lambda t}\mathbf{v}) = A\mathbf{y}(t).$$

Tendo em conta que

$$\mathbf{u}' + i\hat{\mathbf{u}}' = (\mathbf{u} + i\hat{\mathbf{u}})' = \mathbf{y}' = A\mathbf{y} = A(\mathbf{u} + i\hat{\mathbf{u}}) = A\mathbf{u} + iA\hat{\mathbf{u}},$$

tomando a parte real e a parte imaginária de ambos os membros desta igualdade obtém-se $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ e $\hat{\mathbf{u}}' = A\hat{\mathbf{u}}$. \square

Se A for uma matriz $n \times n$ real diagonalizável, então existe um conjunto de n vectores próprios de A linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ forem os respectivos valores próprios associados, podemos construir uma matriz solução fundamental — e daí obter e^{At} — colocando nas colunas de \mathbf{S} as soluções de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ dadas pela proposição anterior; isto é:

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \dots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n.$$

Note que $\mathbf{S}(0)$ é não singular. Se λ for um valor próprio complexo de uma matriz real A , com vector próprio associado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, então o procedimento anterior dá-nos uma matriz solução fundamental complexa; no entanto, podemos utilizar as funções reais $\operatorname{Re} e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda t}\mathbf{v}$, no lugar de $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}$ e $e^{\bar{\lambda}_1 t}\bar{\mathbf{v}}$ ⁹

Exemplo 1:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular uma (MSF) associada a $Y' = AY$ começando por calcular os valores próprios de A :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = -2$$

⁹Se A é uma matriz real, então $\bar{A} = A$. Se (λ, \mathbf{v}) é um par valor próprio, vector próprio (complexo) de A , então $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{v}})$ é também um par valor próprio, vector próprio de A , pois $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$. Neste caso, $\operatorname{Re} e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} = \operatorname{Re} e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\operatorname{Im} e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} = -\operatorname{Im} e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Por cada par de vectores próprios conjugados, \mathbf{v} e $\bar{\mathbf{v}}$, produzem-se desta forma duas (não quatro!) funções reais linearmente independentes, $\operatorname{Re} e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda t}\mathbf{v}$.

1.4. EQUAÇÕES VECTORIAIS DE 1ª ORDEM (OU SISTEMAS)

Conclui-se de imediato que a matriz A é diagonalizável. Como tal vamos calcular os vectores próprios associados.

- $\lambda = 4$, o vector próprio associado é uma solução não nula de

$$(A - 4I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 - 5v_2 = 0$$

Então podemos escolher (por exemplo) $v_2 = 1$) e o vector próprio associado a 4 será $\mathbf{v} = (5, 1)$.

- $\lambda = -2$, o vector próprio associado é uma solução não nula de

$$(A + 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0$$

Então podemos escolher (por exemplo) $v_2 = 1$) e o vector próprio associado a 4 será $\mathbf{w} = (-1, 1)$.

Como tal, a matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} & e^{4t} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação $Y' = AY$. Dado que

$$S(0) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é a matriz identidade, tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} & 5e^{4t} \\ e^{-2t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

isto é

$$e^{At} = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix}$$

É importante calcular as soluções do problema de valor inicial

$$Y' = AY \quad , \quad Y(0) = Y_0 \tag{1.35}$$

para alguns valores especiais de $Y_0 \in \mathbb{R}^2$. Começemos por analisar a solução de (1.35) quando $Y_0 = (0, 0)$. Neste caso, a solução do sistema é constante e, igual a $(0, 0)$, pelo que a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema.

Se $Y_0 = (-5, -1)$, isto é, quando a condição inicial pertence ao espaço próprio associado ao valor próprio 4,

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5e^{4t} \\ -e^{4t} \end{bmatrix} = -e^{4t} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtém-se as equações paramétricas da solução do (1.35)

$$\begin{cases} x(t) = -5e^{4t} \\ y(t) = -e^{4t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t , no espaço $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$ a equação cartesiana da solução é $x = 5y$; isto é, se a condição inicial pertence ao espaço próprio de $\lambda = 4$, a solução do (1.35) nele permanecerá para todo t . Mais se observa que, neste caso

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{4t} = +\infty. \quad (1.36)$$

Nesta direcção, quando $t \rightarrow +\infty$, a solução do (PVI) afasta-se do ponto de equilíbrio.

Se $Y_0 = (-1, 1)$, isto é, quando a condição inicial pertence ao espaço próprio associado ao valor próprio -2 ,

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtemos então as equações paramétricas da solução do (1.35)

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t , no espaço (x, y) a equação cartesiana da solução é $x = -y$; isto é, se a condição inicial pertence ao espaço próprio de $\lambda = -2$, a solução do (1.35) nele permanecerá para todo t . Mais se observa que, neste caso

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = 0. \quad (1.37)$$

Nesta direcção, quando $t \rightarrow +\infty$, a solução do (PVI) aproxima-se do ponto de equilíbrio. Por este facto, (1.36) e (1.37), dizemos que o equilíbrio é um *ponto de sela*.

Em qualquer outra situação, a solução não é constante nem está confinada a uma recta. Por exemplo, se $Y_0 = (1, 1)$, a solução de (1.35) é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 5e^{4t} \\ 2e^{-t} + e^{4t} \end{bmatrix}$$

Fazendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtemos as equações paramétricas da solução do (1.35)

$$\begin{cases} 3x(t) = -2e^{-t} + 5e^{4t} \\ 3y(t) = 2e^{-t} + e^{4t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t , no espaço (x, y) a equação cartesiana da solução é

$$x + y = 2 \left(\frac{4}{5x - y} \right)^2.$$

De um modo geral, se $Y_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, a solução de (1.35) é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -\delta e^{-t} + 5\gamma e^{4t} \\ -\delta e^{-t} - \gamma e^{4t} \end{bmatrix}$$

em que, para facilitar a escrita, fizémos $\gamma = \alpha + \beta$ e $\delta = -\alpha + 5\beta$. Fazendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtemos as equações paramétricas da solução do (1.35)

$$\begin{cases} -6x(t) = -\delta e^{-t} + 5\gamma e^{4t} \\ -6y(t) = -\delta e^{-t} - \gamma e^{4t} \end{cases}$$

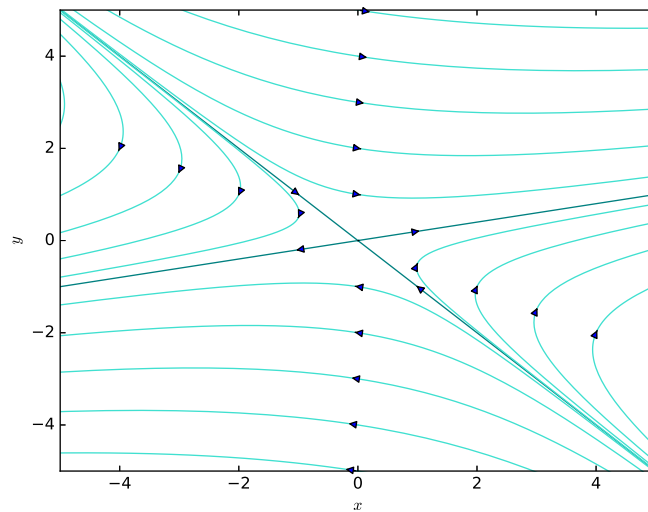


Figura 1.2: Retrato de fase da equação $Y' = AY$.

Eliminando o parâmetro t , a equação cartesiana da solução é

$$x + y = \frac{\gamma \delta^2}{((6 + 5\gamma)x + 5\gamma y)^2}.$$

Exemplo 2:

Vamos determinar e^{At} , sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Começemos por calcular uma matriz solução fundamental $S(t)$. Os valores próprios de A são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-1 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1, \lambda = 1, \lambda = 3$$

Conclui-se de imediato que a matriz A é diagonalizável. Como tal vamos calcular os vectores próprios associados. Para $\lambda = -1$, o vector próprio será $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que

$$(A + I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = c = 0$$

Tem-se então que

$$v = (a, b, c) = (0, b, 0) = b(0, 1, 0)$$

donde podemos escolher $v_1 = (0, 1, 0)$. Para $\lambda = 1$,

$$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a + c = 0, \quad b = 0$$

Tem-se então que

$$v = (a, b, c) = (a, 0, -a) = a(1, 0, -1)$$

donde podemos escolher $v_2 = (1, 0, -1)$. Para $\lambda = 3$,

$$(A - 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a - c = 0, \quad b = 0$$

Tem-se então que

$$v = (a, b, c) = (a, 0, a) = a(1, 0, 1)$$

donde podemos escolher $v_3 = (1, 0, 1)$.

Então a matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação $Y' = AY$. Dado que

$$S(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é a matriz identidade, tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

isto é

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{3t} & 0 & -e^{-t} + e^{3t} \\ 0 & 2e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} + e^{3t} & 0 & e^{-t} + e^{3t} \end{bmatrix}$$

Se quisermos determinar a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dY}{dt} = AY + H(t), \quad Y(0) = [0 \ 1 \ 0]^T$$

sem que

$$H(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

a solução é dada pela fórmula da variação das constantes (usando a exponencial da matriz A)

$$y(t) = e^{At}Y(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As}H(s) ds.$$

Então

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{At} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s} + e^{-3s} & 0 & e^{-3s} - e^{-s} \\ 0 & 2e^s & 0 \\ e^{-3s} - e^{-s} & 0 & e^{-3s} + e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \\ e^s \end{bmatrix} ds \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} & 0 & e^{3t} - e^t \\ 0 & 2e^{-t} & 0 \\ e^{3t} - e^t & 0 & e^t + e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} - 1 \\ 0 \\ e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^t \\ e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.5 Equações Lineares de ordem $n > 1$ — Caso Não Homogéneo

Vamos agora resolver a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (1.38)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n e b , são funções contínuas em $I \subseteq \mathbb{R}$. Como em qualquer equação linear não-homogénea, a solução geral de (1.38) é dada por

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t)$$

em que y_G denota a solução geral da equação homogénea associada

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0,$$

e y_P uma solução particular da equação (1.38). Iremos estudar dois métodos para determinar y_P : um em que se “adivinha” a solução particular da equação (específico para equações de coeficientes constantes e casos particulares de $b(t)$) - o *Método dos coeficientes indeterminados* - e outro onde se aplica uma fórmula (de aplicação geral) - *Fórmula da Variação das Constantes*.

1.5.1 Cálculo da Solução da Equação — Fórmula da Variação das Constantes

A equação escalar de ordem n , (1.38), pode ser escrita na forma de uma equação vectorial de ordem 1 em \mathbb{R}^n da forma que em seguida se descreve. Considera-se

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

E assim

$$\begin{aligned} X' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_{n-1}) &= (y', y'', \dots, y^{(n)}) \\ &= (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \dots - a_{n-1}(t)x_{n-1} + b(t)) \end{aligned}$$

onde se utilizou o facto de pela equação diferencial

$$y^{(n)} = -a_0(t)y - a_1(t)y' - \dots - a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

Assim

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

é denominada *matriz companheira* da equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Observa-se que se a equação (1.38) tiver coeficientes constantes (caso em que $a_i, i = 1, \dots, n-1$ são constantes) a matriz companheira da equação será também de entradas constantes.

Exemplo 1:

Considere-se a equação de ordem 2

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t)$$

Fazendo $X = (x_0, x_1) = (y, y')$ tem-se que

$$\begin{cases} x_0' = y' = x_1 \\ x_1' = y'' = -b(t)y - a(t)y' + h(t) = -b(t)x_0 - a(t)x_1 + h(t) \end{cases}$$

pelo que a equação de ordem 2 pode ser escrita como a equação vectorial de ordem 1 em \mathbb{R}^2

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Considere-se a equação de ordem 3

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = h(t)$$

Fazendo $X = (x_0, x_1, x_2) = (y, y', y'')$ tem-se que

$$\begin{cases} x_0' = y' = x_1 \\ x_1' = y'' = x_2 \\ x_2' = y''' = -c(t)y - b(t)y' - a(t)y'' + h(t) = -c(t)x_0 - b(t)x_1 - a(t)x_2 + h(t) \end{cases}$$

pelo que a equação de ordem 3 pode ser escrita como a equação vectorial de ordem 1 em \mathbb{R}^3

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

Matriz Wronskiana

Sendo y_1, \dots, y_n soluções linearmente independentes da equação homogénea associada (determinadas na Secção 2.4. no caso das equações de coeficientes constantes), define-se matriz *Wronskiana* associada como sendo a matriz $n \times n$

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Como as colunas da matriz $W(t)$ são soluções da equação homogénea associada a (1.39), a matriz $W(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação vectorial (1.39) pelo que, por aplicação da fórmula da variação das constantes para equações vectoriais, tem-se que uma solução de (1.39) será dada por

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = W(t)C + W(t) \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(s) \end{bmatrix} ds.$$

Conclui-se que a solução da equação (1.38) é dada por

$$y(t) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + [y_1(t) \quad \dots \quad y_n(t)] \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{bmatrix} ds$$

Exemplo 1:

Determinar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \tag{1.40}$$

Começemos por determinar uma base do espaço de soluções da equação homogénea associada, isto é resolver a equação

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + 2D + 2)y = 0 \Leftrightarrow ((D + 1)^2 + 1)y = 0$$

pelo que uma base do espaço de soluções será $e^{-t} \cos t$ e $e^{-t} \sin t$, e a sua solução geral é

$$y_H(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Uma matriz Wronskiana é dada por:

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ (e^{-t} \cos t)' & (e^{-t} \sin t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{-t}(\cos t + \sin t) & e^{-t}(-\sin t + \cos t) \end{bmatrix}$$

e assim, por aplicação da fórmula da variação das constantes, a solução particular é

$$y_P(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} = 2e^{-t}$$

Finalmente a solução geral de (1.40) é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t + 2e^{-t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2:

A fórmula da variação das constantes é também aplicável no caso em que a equação não tem coeficientes constantes. Desde que se conheça uma base de soluções da equação homogénea associada, o cálculo da solução é análogo ao que fizemos no exemplo anterior. Assim, considere-se a equação diferencial

$$y'' + \left(t - \frac{3}{t}\right)y' - 2y = t^4 \quad , \quad t > 0$$

É fácil de verificar que as funções

$$y_1(t) = e^{-t^2/2} \quad , \quad y_2(t) = t^2 - 2$$

são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada e como tal formam uma base do seu espaço de soluções. Assim podemos construir a matriz Wronskiana associada

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \\ -te^{-t^2/2} & 2t \end{bmatrix}$$

e pela fórmula da variação das constantes a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ t^4 \end{bmatrix} dt$$

ou seja

$$y(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2(t^2 - 2) + 4 - 2t^2 + \frac{t^4}{2}$$

1.5.2 Método dos Coeficientes Indeterminados

Aplicável **apenas** nos casos em que a equação tem coeficientes constantes, e $h(t)$ é uma função da forma

$$t^p e^{\lambda t} \quad \text{ou} \quad t^p e^{at} \cos(bt) \quad \text{ou} \quad t^p e^{at} \sin(bt) \quad , \quad p \in \mathbb{N}_0 \quad (1.41)$$

ou suas combinações lineares.

Dada uma função $f(t)$, define-se *polinómio aniquilador* de f ao polinómio diferencial de menor ordem, $P_A(D)$, que verifica

$$P_A(D)f = 0$$

Se $f(t)$ é uma combinação linear de funções do tipo descrito em (1.41), então existe um polinómio aniquilador, e, pela secção 2.4.1, concluímos que

se $b(t) = t^p e^{\lambda t}$, então o seu polinómio aniquilador é

$$P_A(D) = (D - \lambda)^{p+1}$$

se $b(t) = t^p e^{at} \cos(bt)$ ou $b(t) = t^p e^{at} \sin(bt)$, então o seu polinómio aniquilador é da forma

$$P_A(D) = (D - (a + ib))^{p+1} (D - (a - ib))^{p+1} = ((D - a)^2 + b^2)^{p+1}$$

O método dos coeficientes indeterminados para resolver a equação $P(D)y = b(t)$ consiste em:

1. Determinar o polinómio aniquilador, $P_A(D)$, de $b(t)$. Seja k o seu grau.
2. Aplicar $P_A(D)$ a ambos os membros da equação inicial, donde resulta:

$$P(D)y = h(t) \quad \Rightarrow \quad P_A(D)P(D)y = P_A(D)h(t) \quad \Leftrightarrow \quad P_A(D)P(D)y = 0$$

Note que a aplicação de $P_A(D)$ **não** produz uma equação equivalente à inicial. Embora qualquer solução de $P(D)y = h(t)$ seja solução de $P_A(D)P(D)y = 0$, nem todas as soluções da segunda equação resolvem a primeira.

Assim obtivemos uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem $n + k$.

3. A solução geral da equação $P_A(D)P(D)y = 0$ é dada por

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$$

em que y_1, \dots, y_n são as soluções linearmente independentes da equação $P(D)y = 0$ determinadas previamente, ou seja:

$$y_G(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

Tem-se então que existem $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_P = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$$

é uma solução particular de $P(D)y = b$.

4. Determinam-se os coeficientes β_1, \dots, β_p de modo a que $w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p$ verifique $P(D)w = b$.

Exemplo 1:

Determinar a solução do PVI

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (1.42)$$

A solução da equação diferencial é da forma

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

em que y_H é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular da equação completa.

• *Cálculo de y_H*

A equação homogénea associada é

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Fazendo $y' = Dy$, obtém-se

$$(D^2 + 3D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D + 1)(D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D + 1)y = 0 \text{ ou } (D + 2)y = 0$$

Uma solução da equação $(D + 1)y = 0$ é e^{-x} . Por outro lado a equação $(D + 2)y = 0$ tem como solução e^{-2x} . Como tal

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

• *Cálculo de y_P*

Dado que $h(x) = e^{-x}$, podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados para determinar a solução particular y_P . O polinómio aniquilador de $h(x)$ é

$$P_A(D) = D + 1$$

Assim, e utilizando a factorização do polinómio característico feito anteriormente:

$$(D + 1)(D + 2)y = e^{-x} \Rightarrow (D + 1)(D + 1)(D + 2)y = (D + 1)e^{-x}$$

Ou seja

$$(D + 1)^2(D + 2)y = 0$$

Resolvendo a equação homogénea obtém-se que

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

Dado que $c_1 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (1.42), conclui-se que a forma da solução particular é $w(x) = \alpha x e^{-x}$. Seguidamente teremos que determinar o valor da constante α de modo a que w seja solução da equação $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$. Tem-se então que

$$(\alpha x e^{-x})'' + 3(\alpha x e^{-x})' + 2(\alpha x e^{-x}) = e^{-x} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Conclui-se que

$$y_P(x) = x e^{-x}$$

- *Cálculo da solução geral de (1.42)*

Como já foi referido

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + x e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo da solução de (1.42)*

Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Finalmente a solução de (1.15) é

$$y(x) = x e^{-x}$$

Exemplo 2:

Determinar a solução do PVI

$$y'' + 16y = \text{sen}(4t) \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad (1.43)$$

A solução da equação diferencial é da forma

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

em que y_H é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular da equação completa.

- *Cálculo de y_H*

A equação homogénea associada é

$$y'' + 16y = 0$$

Fazendo $y' = Dy$, obtém-se $(D^2 + 16)y = 0$, pelo que

$$y_H(x) = c_1 \text{sen}(4t) + c_2 \cos(4t) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo de y_P*

Dado que $b(t) = \text{sen}(4t)$, podemos utilizar o método dos coeficientes indeterminados para determinar a solução particular y_P . O polinómio aniquilador de $b(t)$ é

$$P_A(D) = (D - 4i)(D + 4i) = D^2 + 16$$

Assim

$$(D^2 + 16)y = \text{sen}(4t) \Rightarrow (D^2 + 16)(D^2 + 16)y = (D^2 + 16)\text{sen}(4t)$$

Ou seja

$$(D^2 + 16)^2 y = 0$$

Resolvendo esta equação homogénea obtém-se que

$$y(t) = c_1 \text{sen}(4t) + c_2 \cos(4t) + c_3 t \text{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t)$$

Dado que $c_1 \operatorname{sen}(4t) + c_2 \cos(4t)$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (1.43), conclui-se que a forma da solução particular é $w(t) = c_3 t \operatorname{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t)$. Seguidamente teremos que determinar as constantes c_3 e c_4 de modo a que w seja solução da equação $y'' + 16y = \operatorname{sen}(4t)$. Tem-se então que

$$(c_3 t \operatorname{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t))'' + 16(c_3 t \operatorname{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t)) = \operatorname{sen}(4t) \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = -1/8 \end{cases}$$

Conclui-se que

$$y_P(t) = -\frac{t \cos(4t)}{8}$$

- *Cálculo da solução geral de (1.43)*

Como já foi referido

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 \operatorname{sen}(4t) + c_2 \cos(4t) - \frac{t \cos(4t)}{8}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo da solução de (1.43)*

Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ 4c_1 - \frac{1}{8} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{32} \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalmente a solução de (1.43) é

$$y(t) = \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4t) + \cos(4t) - \frac{t \cos(4t)}{8}$$

1.6 Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções

Consideramos o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.44)$$

onde a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tem domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. É costume designar $f(t, y)$ por *campo de direcções* da equação diferencial em (1.45); isto deriva do facto de **a recta tangente ao gráfico das soluções da equação diferencial** ter, em cada ponto (t, y) desse gráfico, **declive igual a $f(t, y)$** . Note que se $y(t)$ é solução da equação diferencial então $f(t, y(t)) = \frac{dy}{dt}(t)$.

Nesta secção estudamos as condições que a função $f(t, y)$ deve verificar para que a solução do PVI:

- exista;
- seja única;
- esteja definida num intervalo maximal $I =]a, b[$.

Estas questões matemáticas são muito importantes do ponto de vista das aplicações. Os métodos numéricos que na prática são aplicados no cálculo aproximado de soluções de uma equação diferencial ordinária exigem, como hipótese, que a solução do PVI exista, seja única e que dependa continuamente das condições iniciais — isto é, que seja um *problema bem posto*. É sabido que quando um PVI falha uma daquelas propriedades as soluções dos esquemas numéricos correspondentes podem exibir comportamentos que as tornam inúteis, na óptica das aplicações.

1.6.1 Teorema de Peano

Se exigirmos apenas continuidade de $f(t, y)$, podemos provar o:

Teorema de Peano (Existência de solução local)

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em $(t, y) \in D$. Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite pelo menos uma solução, $y(t)$, num intervalo $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ para certo $\alpha > 0$.

Pode-se então colocar a questão de saber se a continuidade de $f(t, y)$ é suficiente para provar unicidade de solução. A subsecção seguinte mostra que a resposta a esta questão é negativa.

1.6.2 Exemplo de não unicidade de solução

Considere-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Vamos construir um conjunto infinito de soluções para este PVI.

Começamos por notar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI.

Por outro lado, admitindo que $y(t) > 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-1/2} \frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\int y^{-1/2} dy \right) = 1 \Leftrightarrow 2y^{1/2} = t + c$$

Desta forma, para $t + c > 0 \Leftrightarrow t > -c$, a função

$$y(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$$

é continuamente diferenciável e satisfaz a equação diferencial para $t > -c$.

Podemos agora utilizar o método de “cortar” e “colar” a partir das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$, para $t > -c$, para criar novas soluções do PVI. Será necessário, obviamente, que que no “ponto de colagem” a nova solução seja uma função contínua, diferenciável e que verifique a equação diferencial.

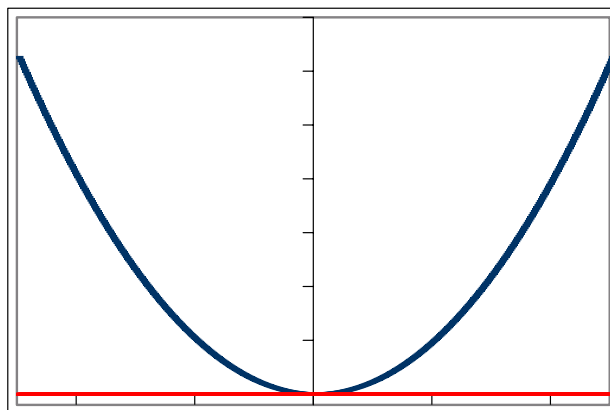


Figura 1.3: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e a solução $y(t) = t^2/4$.

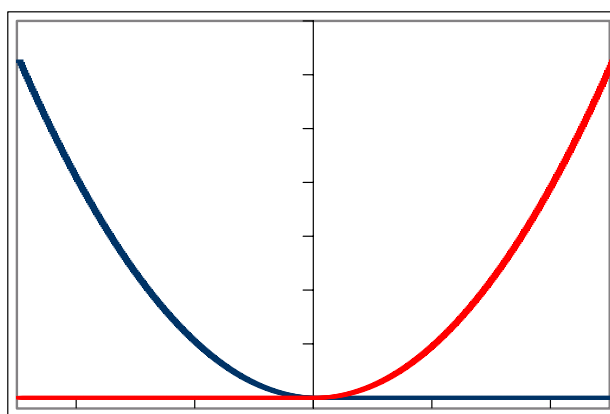


Figura 1.4: As soluções do PVI quando $c = 0$.

Para $t_1 > 0$, defina-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_1 \\ \frac{1}{4}(t - t_1)^2 & \text{se } t > t_1 \end{cases}$$

Verifica-se que y_{t_1} é diferenciável e verifica a equação diferencial em $\mathbb{R} \setminus \{t_1\}$, pois foi construída à custa das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t + c)^2$, com $c = -t_1$. Note que esta escolha de c faz precisamente com que

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} y_{t_0}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} y_{t_1}(t) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \left(\frac{t_1}{2} - k\right)^2,$$

ou seja, que y_{t_1} seja contínua em t_1 e $y_{t_1}(t_1) = 0$. Também as derivadas laterais de y_{t_1} em t_1 existem e são nulas, pelo que y_{t_1} satisfaz a equação diferencial em t_1 .

O facto de existirem uma infinidade de soluções mostra que a continuidade da função $f(t, y) = \sqrt{y}$ no seu domínio não é suficiente para garantir unicidade de solução para o PVI.

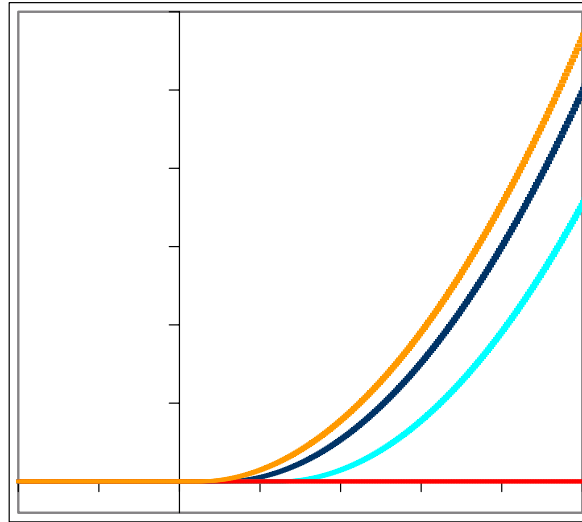


Figura 1.5: As soluções y_{t_1} com $t_1 = 1/5$, $t_1 = 1/2$ e $t_1 = 6/5$.

De facto, temos que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y} \right| |x - y|,$$

onde o termo

$$\left| \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y} \right|,$$

não é limitado para x, y num vizinhança qualquer da origem. Isto implica, em particular, que fixando $y = 0$ as taxas médias de crescimento da função f não são limitadas. Ora, foi precisamente nos pontos onde a solução da equação é nula que se observou a bifurcação de soluções!

1.6.3 Condição de Lipschitz

Nesta Secção, definiremos uma classe de funções contínuas que não são necessariamente diferenciáveis relativamente a y , mas para as quais o Teorema de Picard é válido. O exemplo anterior sugere que se introduza a seguinte condição adicional sobre f , que é devida a Lipschitz.

Considere-se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, onde $D \subset \mathbb{R}^2$. Diz-se que

- f é Lipschitziana relativamente a y em D sse

$$|f(t, y) - f(t, w)| \leq K|y - w| \quad \forall (t, y), (t, w) \in D$$

A constante $K \in \mathbb{R}^+$ é denominada a *constante de Lipschitz*. Observe-se que se a função f é Lipschitziana relativamente a y em D , verificará

$$\left| \frac{f(t, y) - f(t, w)}{y - w} \right| \leq K \quad \forall (t, y), (t, w) \in D$$

o que significa que a taxa de crescimento de f relativamente à segunda coordenada, é limitada em D . Em particular isto significa que:

- Se $\partial f/\partial y$ existe (em D), então $\partial f/\partial y$ é uma função limitada em D ;
- Se $\partial f/\partial y$ não existe em todos os pontos de D (porque não existe $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t,y+h)-f(t,y)}{h}$, para algum $(t,y) \in D$), ainda assim a razão incremental $\frac{f(t,y)-f(t,y+h)}{h}$ será sempre limitada, para todo h numa vizinhança de 0.

- f é **localmente lipschitziana relativamente a y em D** sse for lipschitziana relativamente a y em todo o subconjunto compacto de D .

• **Critério**

Se f é contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe e é contínua em $D \subset \mathbb{R}^2$ então f é localmente lipschitziana relativamente a y em D .

1.6.4 Teorema de Picard

Enunciaremos, de seguida, o resultado que estabelece existência e unicidade de solução de um problema de valor inicial relativo a uma equação diferencial ordinária e escalar de primeira ordem. Veremos mais tarde que este teorema pode ser generalizado às equações vectoriais de primeira ordem, garantindo nessa versão a existência e unicidade de problemas de valor inicial envolvendo essas equações e (como sua consequência) também envolvendo equações lineares de ordem n .

Teorema de Picard

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, D contínua em $(t,y) \in D$ e localmente lipschitziana relativamente a y em D . Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução, $y(t)$, para t pertencente a $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ para certo $\alpha > 0$.

Equivalência entre o Problema de Valor Inicial e um Problema Integral

É fácil verificar que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.45}$$

é equivalente à equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \tag{1.46}$$

para $y \in C^1(I)$, sendo I qualquer intervalo aberto contendo t_0 .

De facto, se $y \in C^1(I)$ satisfaz o PVI (1.45) então, integrando ambos os membros da equação diferencial entre t_0 e t e usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \Leftrightarrow y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

Usando agora a condição inicial do PVI (1.45), obtém-se a equação integral (1.46).

Reciprocamente, admitindo que $y \in C(I)$ é solução da equação integral (1.46) então, aplicando o teorema fundamental do cálculo ao integral do membro direito da equação conclui-se que $y(t)$ é diferenciável e que:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I.$$

Assim sendo, $y(t)$ é solução da equação diferencial. Por outro lado, substituindo t por t_0 na equação integral (1.46), obtém-se $y(t_0) = y_0$.

A equação integral é, do ponto de vista da Análise Matemática, muito útil pois a estimação de integrais é mais fácil que a das derivadas.

Iteradas de Picard

Derivamos agora a partir da equação integral uma sucessão de aproximações — as iteradas de Picard. Trata-se de uma sucessão de funções contínuas $y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida recursivamente por:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds \\ &\vdots \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds \\ &\vdots \end{aligned}$$

Exemplo 1: Considere-se o PVI

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1.47)$$

A solução do PVI (1.47) é

$$y(x) = e^{x^2}, \quad I_{\text{Max}} = \mathbb{R}$$

Por outro lado a sucessão $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao (PVI) é

$$y_0(x) = y_0 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2sy_0(s) ds = 1 + \int_0^x (2s) ds = 1 + x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (2sy_1(s)) ds = 1 + \int_0^x 2s(1 + s^2) ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (2sy_2(s)) ds = 1 + \int_0^x 2s(1 + s^2 + \frac{s^4}{2}) ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$

⋮

Na Figura (2.5) estão representadas as primeiras iteradas de Picard assim como a solução do (PVI).

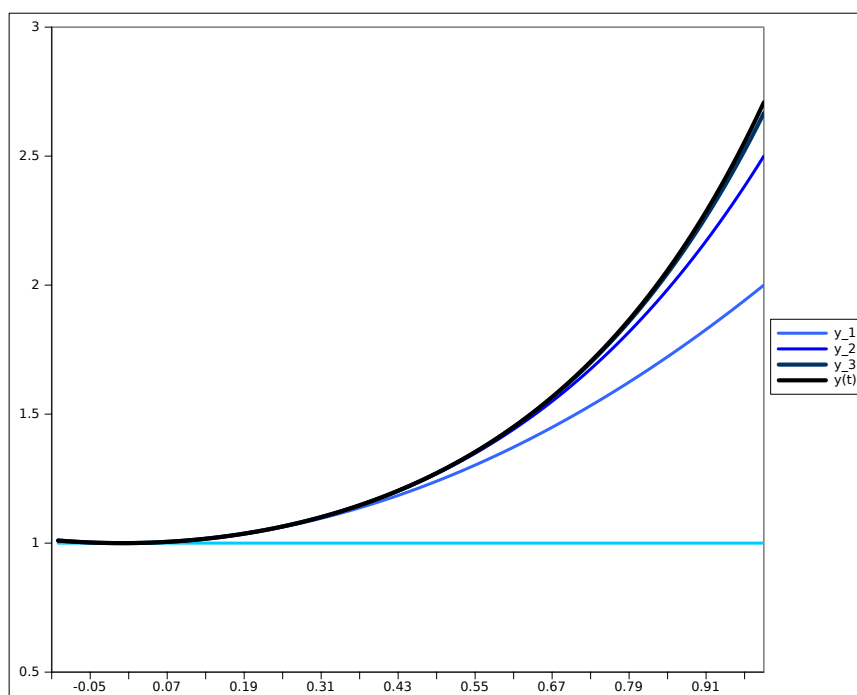


Figura 1.6: Algumas iteradas de Picard e a solução do (PVI) (1.47).

Pode-se verificar, por indução matemática, que:

$$y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Neste caso, a sucessão das iteradas de Picard, y_n , é precisamente igual à sucessão das somas parciais da série de McLaurin da solução do (PVI), $y(x) = e^{x^2}$. No entanto, e conforme se ilustra no exemplo seguinte, tal tipo de identidade pode não se verificar mesmo em casos simples.

Exemplo 2: Considere-se o (PVI)

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1.48)$$

Vamos construir a sucessão $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao (PVI). Assim:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 = 1 \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x (y_0(s))^2 ds = 1 + \int_0^x 1 ds = 1 + x \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x (y_1(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1 + s)^2 ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x (y_2(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3})^2 ds = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por outro lado, resolvendo a equação diferencial, obtém-se

$$y' = y^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int y^{-2} dy = 1 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{c - x}.$$

A solução do (PVI) será então

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad I_{\text{Max}} =] - \infty, 1[$$

Na Figura (2.6) estão representadas as primeiras iteradas de Picard, bem como a solução do (PVI). É de observar que quando nos aproximamos do ponto $x = 1$ (onde a solução do (PVI) explode) a convergência das iteradas de Picard torna-se cada vez mais lenta.

Pode-se provar (a demonstração não é inteiramente trivial) que as iteradas de Picard deste problema verificam

$$y_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + R_{n+1}(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x) \quad (1.49)$$

onde $R_{n+1}(x)$ é uma função polinomial com um zero de ordem $n + 1$ em $x = 0$. Note que $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ é a sucessão das somas parciais da série geométrica, cuja soma é precisamente a solução do (PVI), $y(x) = \frac{1}{1-x}$, mas somente em $] - 1, 1[$. Em casos menos

simples que estes dois exemplos — quando $f(t, y)$ não é uma função polinomial — as iteradas de Picard não são polinomiais; no entanto, e mesmo sem se conhecer a forma explicita dessas iteradas, pode-se usar a análise matemática para provar a sua convergência local.

Para proceder ao resto da demonstração do Teorema de Picard, teremos que mostrar que a sucessão das iteradas de Picard associada, $y_n(t)$, converge uniformemente, num certo intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para uma função contínua $y(t)$ então tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os membros da fórmula que define as iteradas de Picard obtém-se que $y(t)$ satisfaz a equação integral em I , pelo que é solução do PVI no intervalo aberto $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

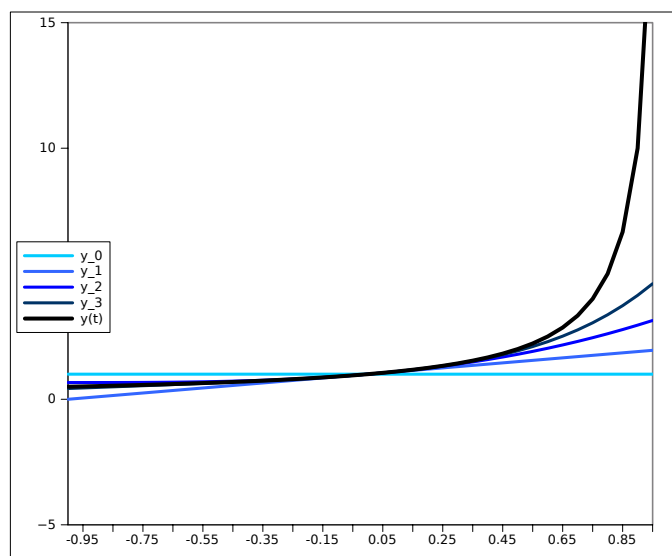


Figura 1.7: Algumas iterações de Picard e a solução do (PVI) (1.48).

Convergência Uniforme das Iteradas de Picard

Vamos então demonstrar que a sucessão das iterações de Picard, $y_n(t)$, converge uniformemente num intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, para certo $\alpha > 0$ a determinar (o seu valor irá depender de t_0 , y_0 e f).

Começamos por estimar a diferença entre duas iterações de Picard consecutivas ¹⁰:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| |ds| \end{aligned}$$

Vamos estimar a função integranda através da condição de Lipschitz. Considere-se um retângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \text{ e } y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ contido no domínio, D , de f .

Seja K a constante de Lipschitz de f (relativamente a y) no conjunto compacto R , ou seja, K verifica:

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq K|y - x| \quad \forall (t, y), (t, x) \in R \quad (1.50)$$

Para que o gráfico das iterações de Picard permaneça no interior de R (por forma a que a estimativa de Lipschitz (1.50) seja válida quando aplicada a pontos $(t, y_n(t))$), é necessário que:

1º) $t \in]t_0 - a, t_0 + a[$, pelo que devemos ter $\alpha < a$.

¹⁰Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no intervalo I e $a, b \in I$ (sem que se tenha, necessariamente, $b \geq a$) então obtém-se, como caso particular da propriedade de majoração do integral complexo (Subsecção ??):

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| |dt|.$$

Note que $\int_a^b |f(t)| |dt|$ é igual a $\int_a^b |f(t)| dt$ se $b \geq a$ e a $\int_a^b |f(t)| dt$ se $b < a$. Em particular, $\int_a^b |dt| = |b - a|$.

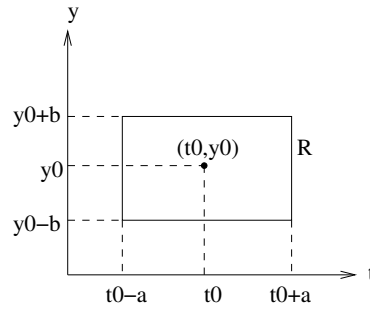


Figura 1.8: O retângulo R .

2º) Seja

$$M = \max \{|f(t, y)| : (t, y) \in R\}$$

Para que $(t, y_n(t))$ esteja no interior de R para $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, é necessário que $|y_n(t) - y_0| < b$. Como

$$|y_n(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s))| |ds| \leq M \int_{t_0}^t |ds| = M|t - t_0| \leq M\alpha,$$

isso implica que devemos ter $M\alpha < b$. Para tal, é preciso exigir $\alpha < b/M$.

Assim, para qualquer $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \stackrel{\text{def}}{=} I_\alpha$:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))| |ds| \\ &\leq \int_{t_0}^t K |y_n(s) - y_{n-1}(s)| |ds| \\ &\leq K \max_{s \in I_\alpha} |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \int_{t_0}^t |ds| \\ &\leq K\alpha \max_{s \in I_\alpha} |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \end{aligned}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} \max_{t \in I_\alpha} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq K\alpha \max_{t \in I_\alpha} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \\ &\leq (K\alpha)^2 \max_{t \in I_\alpha} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \\ &\vdots \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} |y_1(t) - y_0| \end{aligned}$$

Como $y_1(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds$, resulta então da desigualdade anterior que:

$$\begin{aligned} \max_{t \in I_\alpha} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds \right| \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^t |f(s, y_0)| |ds| \\ &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^t M |ds| \\ &= (K\alpha)^n M\alpha < (K\alpha)^n b \end{aligned}$$

Definindo $r = K\alpha$, então

$$\max_{t \in I_\alpha} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| < br^n. \quad (1.51)$$

Utilizando somas telescópicas:

$$\begin{aligned} y_n(t) &= (y_n(t) - y_{n-1}(t)) + (y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)) + \dots \\ &\quad \dots + (y_2(t) - y_1(t)) + (y_1(t) - y_0) + y_0 \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t)) \end{aligned}$$

Isto significa que $y_n(t)$ é a sucessão das somas parciais da série

$$y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (y_k(t) - y_{k-1}(t)) \quad (1.52)$$

A terceira restrição que introduzimos ao valor de α é $r = K\alpha < 1$, ou seja $\alpha < 1/K$. Assim, como $|r| < 1$, $\sum_{k=m}^{\infty} br^k$ é uma série geométrica convergente. Por outro lado, o termo geral da série (1.52) verifica

$$|y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq br^k,$$

para $k \geq 1$. Pelo Critério de Weierstrass, $y_n(t)$ converge uniformemente em I_α , e o limite é a soma da série de funções contínuas (1.52). Resulta assim que $y : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ existe e é contínua desde que tomemos:

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\} \quad (1.53)$$

Utilizando somas telescópicas, e para $n > m$:

$$\begin{aligned} y_n(t) - y_m(t) &= (y_n(t) - y_{n-1}(t)) + (y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)) + \dots \\ &\quad \dots + (y_{m+2}(t) - y_{m+1}(t)) + (y_{m+1}(t) - y_m) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} y_{k+1}(t) - y_k(t) \end{aligned}$$

Assim, usando a estimativa (1.51):

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_m(t)| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} br^k \leq \sum_{k=m}^{\infty} br^k \end{aligned}$$

A terceira restrição que introduzimos ao valor de α é $r = K\alpha < 1$, ou seja $\alpha < 1/K$. Assim, como $|r| < 1$, $\sum_{k=m}^{\infty} br^k$ é uma série geométrica convergente e a sua soma é $\frac{br^m}{1-r}$. Desta forma, para qualquer $t \in I_\alpha$:

$$\left| y_n(t) - y_m(t) \right| \leq \frac{br^m}{1-r} \rightarrow 0 \quad \text{quando } m, n \rightarrow \infty,$$

o que implica que $y_n(t)$ verifica o critério de Cauchy para convergência uniforme em I_α . Assim, $y_n(t)$ converge uniformemente em I_α para uma função contínua $y : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, desde que tomemos:

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\} \quad (1.54)$$

Existência e Regularidade da Solução

Considerando agora as iteradas de Picard,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y_n(t)) dt \quad (1.55)$$

e usando a convergência uniforme de $y_n(t)$ para $y(t)$ em I_α , então tomando o limite em ambos os membros de (1.55) conclui-se que $y(t)$ satisfaz a equação integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t)) dt$$

Como $y(t)$ é contínua em I_α , então $f(t, y(t))$ é contínua em I_α . Por aplicação do teorema fundamental do cálculo ao 2º membro da equação integral, podemos concluir que $y \in C^1(I_\alpha)$.

Unicidade de Solução

Supondo que $y(t)$ e $z(t)$ são duas soluções do PVI, então verificam

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, y(t)) dt$$

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(t, z(t)) dt$$

em $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde α satisfaz (1.54). Assim:

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &\leq \int_{t_0}^t \left| f(s, y(s)) - f(s, z(s)) \right| |ds| \\ &\leq \int_{t_0}^t K |y(s) - z(s)| |ds| \\ &\leq K \max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| \int_{t_0}^t |ds| \\ &\leq K\alpha \max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| \end{aligned}$$

Como $\alpha < 1/K$, ou seja, $K\alpha < 1$,

$$|y(t) - z(t)| \leq \max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)|,$$

sendo a igualdade apenas verificada quando $\max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| = 0$. Como é impossível que se verifique a desigualdade estrita para todo o $t \in I_\alpha$ (pois o máximo de $|y(t) - z(t)|$ é atingido num ponto $t_1 \in I_\alpha$) concluímos que $\max_{s \in I_\alpha} |y(s) - z(s)| = 0$, ou seja:

$$y(t) = z(t) \quad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

□

Exemplos:

(1) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1 - xy} \quad , \quad y(0) = 0 \tag{1.56}$$

Começemos por observar que $f(x, y) = \sqrt[3]{1 - xy}$

- está definida e é contínua em \mathbb{R}^2 ;
- $\partial f / \partial y$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 1\}$, conseqüentemente, f é localmente lipschitziana neste conjunto.

Conclui-se que $f(x, y)$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 1\}$. Dado que $(x_0, y_0) = (0, 0) \in D$ o problema de valor inicial (1.56) admite uma única solução, $y(x)$ definida numa vizinhança de $x_0 = 0$.

(2) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1 - xy} \quad , \quad y(1) = 1 \tag{1.57}$$

Como vimos no exemplo anterior $f(x, y) = \sqrt[3]{1 - xy}$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : xy = 1\}$. Em primeiro lugar, e dado que $f(x, y)$ é contínua em \mathbb{R}^2 , o Teorema de Peano garante que o PVI (1.57) admite pelo menos uma solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$. No entanto neste exemplo tem-se que $(x_0, y_0) = (1, 1) \notin D$. Observe-se que este facto não implica de imediato que $f(x, y)$ não verifique as condições do Teorema de Picard num conjunto que contenha $(1, 1)$, pois o facto de $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ não existir não implica que $f(x, y)$ não seja lipschitziana em conjuntos contendo $(1, 1)$. Teremos então que verificar directamente este facto. Assim, seja B qualquer subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^2 , e $(x, y_1), (x, y_2) \in B$.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\sqrt[3]{1 - xy_1} - \sqrt[3]{1 - xy_2}| = \left| \frac{\sqrt[3]{1 - xy_1} - \sqrt[3]{1 - xy_2}}{y_1 - y_2} \right| |y_1 - y_2|$$

Para que f seja lipschitziana em B , a quantidade

$$L(x, y_1, y_2) = \left| \frac{\sqrt[3]{1 - xy_1} - \sqrt[3]{1 - xy_2}}{y_1 - y_2} \right|$$

tem que ser limitada para todos $(x, y_1), (x, y_2) \in B$. Considere-se $(x, y_2) = (1, 1)$ e $(x, y_1) = (1, 1 + h)$ para $h \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$L(1, 1, 1 + h) = \left| \frac{\sqrt[3]{-h}}{h} \right| = |h|^{-2/3}$$

É então fácil de observar que para valores de h próximos de 0 (o que corresponde a estarmos em pontos (x, y) próximos de $(1, 1)$), $|h^{-2/3}|$ aproxima-se de ∞ pelo que $L(1, 1, 1 + h)$ não é limitada. Concluimos que f não é lipschitziana em qualquer conjunto contendo o ponto $(1, 1)$, pelo que não se verificam as condições do Teorema de Picard numa vizinhança de $(1, 1)$. Concluimos então que não se pode garantir unicidade de solução para (1.57).

(3) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = |x + y| \quad , \quad y(1) = -1 \tag{1.58}$$

Começemos por observar que $f(x, y) = |x + y|$ está definida e é contínua em \mathbb{R}^2 o Teorema de Peano garante que o PVI (1.58) admite pelo menos uma solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$. Por outro lado, $\partial f / \partial y$ está definida e é contínua em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x + y = 0\}$. Visto $(x_0, y_0) \notin D$, teremos que averiguar directamente se $f(x, y)$ é lipschitziana numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (1, -1)$. conjunto limitado e fechado que contenha $(1, -1)$. Assim, seja B qualquer subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^2 , e $(x, y_1), (x, y_2) \in B$.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = ||x + y_1| - |x + y_2|| \leq |(x + y_1) - (x + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

Tem-se então que $f(x, y)$ é lipschitziana em B (com constante de Lipschitz $L = 1$, pelo que f é localmente lipschitziana em \mathbb{R}^2 . O Teorema de Picard garante então unicidade de solução para (1.58).

1.6.5 Prolongamento de Solução

Sem acrescentar mais condições a f , a conclusão do teorema de Picard pode ser substancialmente melhorada da forma que em seguida se descreve.

Teorema (Prolongamento de Solução):

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $(t_0, y_0) \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a y em D . Então a solução única do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

está definida num intervalo máximo de definição, $I_{max} =]a, b[$, cujos extremos, $a, b \in \mathbb{R}$, verificam

- (i) $b = +\infty$ **ou**
- (ii) $b < +\infty$ e $(t, y(t)) \rightarrow \partial D$ quando $t \rightarrow b^-$ **ou**
- (iii) $b < +\infty$ e $\lim_{t \rightarrow b^-} |y(t)| = +\infty$

e

- (i) $a = -\infty$ **ou**
(ii) $a < -\infty$ e $(t, y(t)) \rightarrow \partial D$ quando $t \rightarrow a^+$ **ou**
(iii) $a < -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow a^+} |y(t)| = +\infty$

Note que os casos do tipo (iii) significam que a solução explode (respectivamente, quando $t \rightarrow b$ ou $t \rightarrow a$). Quanto aos casos do tipo (ii), por exemplo

$$(t, y(t)) \rightarrow \partial D \quad \text{quando } t \rightarrow b^-$$

significa que qualquer ponto limite do gráfico de $y(t)$ para $t \in [t_0, b[$ (este gráfico é o conjunto $\{(t, y(t)) : t \in [t_0, b[\} \subset \mathbb{R}^2$) pertence à fronteira de D , ∂D . Isto é equivalente a dizer que qualquer sucessão $t_n \in]a, b[$ tal que $t_n \rightarrow b$ e $y(t_n)$ é convergente verifica:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n, y(t_n)) \in \partial D$$

(e, analogamente, quando $t \rightarrow a^+$).

Dem.:

Vamos provar a conclusão do teorema para o prolongamento para a direita, isto é, até b .

Seja J o conjunto dos $\tau \in \mathbb{R}$ tais que existe solução $y : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ do problema de valor inicial ¹¹. Pelo teorema de Picard, $J \neq \emptyset$. Se J não for majorado, então a conclusão do teorema é satisfeita pois verifica-se o caso (i). Por outro lado, se J é majorado, como $J \neq \emptyset$ então existe $b = \sup J < +\infty$. Pelo teorema de Picard, $J \neq \emptyset$. Se J não for majorado, então a conclusão do teorema é satisfeita pois verifica-se o caso (i). Por outro lado, se J é majorado, como $J \neq \emptyset$ então existe $b = \sup J < +\infty$.

Admitamos que tanto (ii) como (iii) não se verificam. Como $\lim_{t \rightarrow a^+} |y(t)| = +\infty$ não é verdade, então existe uma sucessão $s_n \rightarrow b^-$ tal que $y(s_n)$ é limitada; sendo limitada, tal sucessão tem uma subsucessão convergente. Isto mostra que existem sucessões $t_n \in]a, b[$ tais que $t_n \rightarrow b$ e $y(t_n)$ é convergente. Mas como (ii) não se verifica, então para pelo menos uma dessas sucessões, $(t_n, y(t_n))$ converge para um certo $(b, \omega) \in \text{int } D$.

Seja $\delta < \frac{1}{3} \text{dist}((b, \omega), \partial D)$; assim sendo, $\overline{B_{3\delta}(b, \omega)}$ é um subconjunto compacto de D . Seja K a constante de Lipshitz de f em $\overline{B_{3\delta}(b, \omega)}$ e

$$\alpha = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{K} \right\}. \quad (1.59)$$

Seja (\bar{t}, \bar{y}) um termo da sucessão $(t_n, y(t_n))$ tal que

$$\|(\bar{t}, \bar{y}) - (b, \omega)\| < \alpha \quad (1.60)$$

Então o quadrado

$$R = \left\{ (t, y) : t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \text{ e } y \in [\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta] \right\}$$

¹¹Note que se $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ (onde $I \subset \tilde{I}$ são intervalos), então a solução \tilde{y} restrita a I é uma solução do PVI em I . Resulta da unicidade de solução do PVI que $\tilde{y}(t) = y(t)$ para qualquer $t \in I$; ou seja, a restrição de \tilde{y} ao domínio de y , I , coincide necessariamente com y .

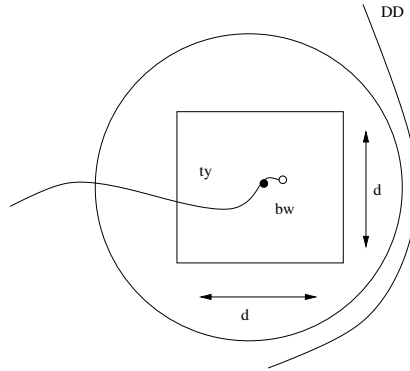


Figura 1.9

verifica

$$R \subset \overline{B_{\delta\sqrt{2}}(\bar{t}, \bar{y})} \subset B_{\delta\sqrt{2}+\alpha}(b, \omega) \subset B_{3\delta}(b, \omega),$$

pois, tendo em conta (1.59), $\delta\sqrt{2} + \alpha \leq \delta\sqrt{2} + \delta < 3\delta$.

Pela demonstração do teorema de Picard e (1.59), concluímos que a solução $y(t)$ admite extensão ao intervalo $[t_0, \bar{t} + \alpha]$ e que, tendo em conta (1.60), $b - \bar{t} < \alpha$, o que implica que:

$$\bar{t} + \alpha > b$$

Mas isto é absurdo, pois contradiz o facto de que $b = \sup J$.

A demonstração do prolongamento para a esquerda (até a) é análoga à anterior. \square

Em qualquer um dos casos, verificar que a solução não pode ser prolongada até $t = \infty$ (ou $t = -\infty$) porque a fronteira do conjunto D é atingida pode ser fácil de constatar pois a função $f(t, y)$ é dada e, conseqüentemente, conhecemos os subconjuntos de \mathbb{R}^2 onde o gráfico da solução não pode entrar. Para mostrar que a solução explode (ou que não explode) ou, mais genericamente, que o seu gráfico está confinado a uma certa região de \mathbb{R}^2 , é muito útil o seguinte critério.

1.6.6 Comparação de Soluções

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ verificando as condições do Teorema de Picard e $(t_0, y_0) \in D$.

Sejam ainda, $y(t)$ a solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

e $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \quad , \quad u(t_0) = y_0$$

Se

$$f(t, y) \leq g(t, y) \quad , \quad \forall (t, y) \in D$$

então

$$\begin{cases} y(t) \leq u(t) & \text{para todo } t \geq t_0 \\ y(t) \geq u(t) & \text{para todo } t \leq t_0 \end{cases}$$

Consequências:

• **Mostrar que a solução explode**

Seja $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \quad , \quad u(t_0) = \alpha$$

definida em $I_{\max}^u =]t_0 - \epsilon, T[$, tendo-se que $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$. Se $y(t)$ é solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t, y) \geq g(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \geq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ explode no intervalo $]t_0, T[$, isto é, existe $\Theta \in]t_0, T[$ tal que $\lim_{t \rightarrow \Theta^-} y(t) = +\infty$ e consequentemente $\sup I_{\max}^y = \Theta$

• **Mostrar que a solução não explode**

Seja $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \quad , \quad u(t_0) = \alpha$$

definida em $I_{\max}^u =]a, +\infty[$ para certo $a < t_0$. Se $y(t)$ é solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t, y) \leq g(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ não explode para $+\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Analogamente, seja $v(t)$ a solução do PVI

$$\frac{dv}{dt} = h(t, v) \quad , \quad v(t_0) = \alpha$$

definida em $I_{\max}^v =]a_1, +\infty[$ para certo $a_1 < t_0$. Se $y(t)$ é solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t, y) \geq h(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \geq v(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ não explode para $-\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Conclui-se que $y(t)$ não explode no intervalo $]t_0, +\infty[$.

Exemplo 1

Considere-se o (PVI)

$$y' = (1 + y^2)f(ty) \quad , \quad y(0) = 0$$

em que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, verificando $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Como a função $(1 + y^2)f(ty)$ é contínua em \mathbb{R}^2 , e a função

$$\frac{\partial}{\partial y}((1 + y^2)f(ty)) = 2yf(ty) + (1 + y^2)f'(ty)t$$

é também contínua em \mathbb{R}^2 , o teorema de Picard garante a existência de uma solução única $y = \phi(t)$ num vizinhança aberta da origem tal que $\phi(0) = 0$.

Pretendemos agora mostrar que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

$$\dot{y} = (1 + y^2)f(ty) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{1 + y^2} = f(ty)$$

Integrando em t obtem-se

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{1 + y^2(s)} ds = \int_0^t f(s y(s)) ds$$

pelo que

$$\arctg y(t) - \arctg y(0) = \int_0^t f(s y(s)) ds$$

Visto $y(0) = 0$

$$y(t) = \operatorname{tg} \left(\int_0^t f(s y(s)) ds \right)$$

Se $f(x) \geq 1$ e atendendo a que a função tangente é monótona crescente em $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, podemos escrever

$$y(t) \geq \operatorname{tg} \left(\int_0^t 1 ds \right) = \operatorname{tg} t$$

Como $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty$ a solução explode e como tal o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

Exemplo 2

Considere-se o problema de valor inicial

$$y' = -2(\operatorname{sen}(e^{ty}) + 2)y \quad , \quad y(0) = 1 \tag{1.61}$$

Sendo

$$f(t, y) = -2(\operatorname{sen}(e^{ty}) + 2)y$$

é fácil de verificar que tanto f como $\partial f / \partial y$ são contínuas em \mathbb{R}^2 . Isto implica que f verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2$ e assim (1.61) tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$. Temos agora que mostrar que a solução pode ser prolongada a \mathbb{R} . Observe-se que para $y_0 \neq 0$, a equação é equivalente a:

$$\frac{y'}{y} = -2(\operatorname{sen}(e^{ty}) + 2)$$

Integrando esta igualdade de 0 a t , obtém-se:

$$\log y(t) - \log y(0) = \int_0^t (-2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2)) ds$$

Como, para quaisquer $(s, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$-6 \leq -2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2) \leq -2$$

pode-se concluir que

$$-6t \leq \int_0^t (-2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2)) ds \leq -2t$$

se $t > 0$ e

$$-2t \leq \int_0^t (-2(\operatorname{sen}(e^{sy(s)}) + 2)) ds \leq -6t$$

se $t < 0$. Desta forma (e como $\log y(0) = \log 1 = 0$):

$$-6t \leq \log y(t) \leq -2t$$

Em primeiro lugar, isto implica que $y(t)$ nunca atinge o valor 0, pelo que a desigualdade estima o valor de $y(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. A mesma desigualdade implica também que $y(t)$ não explode em tempo finito, pois $\log y(t)$ é sempre finito para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Como o domínio de f é \mathbb{R}^2 , o teorema do prolongamento de solução garante a existência de uma solução global.

1.7 Apêndice 1 - Cálculo da Matriz e^{At} por diagonalização

- A é uma matriz diagonal:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- A é uma matriz diagonalizável:

Uma matriz A , $n \times n$, diz-se *diagonalizável* se admite n vectores linearmente independentes. Demonstra-se que,

$$\text{se } A \text{ é diagonalizável então } A = S\Lambda S^{-1}$$

em que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \\ | & \dots & | \end{bmatrix}$$

sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os valores próprios de A e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ os correspondentes vectores próprios. Não é difícil de demonstrar que para matrizes A e B semelhantes, se tem

$$A = SBS^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = Se^{Bt}S^{-1}$$

Podemos então concluir que, se A é diagonalizável, isto é

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} S^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = Se^{At}S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & \cdot & & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Observações:

- Como consequência dos teoremas anteriores, dado que a matriz e^{At} é uma matriz solução fundamental da equação $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}$, a sua solução é da forma $\mathbf{Y}(t) = e^{At}C$, com $C \in \mathbb{R}^n$. Atendendo a que $e^{At} = Se^{At}S^{-1}$, então

$$\mathbf{Y}(t) = Se^{At}S^{-1}C \equiv Se^{At}C_1$$

pelo que a matriz $S(t) = Se^{At}$ é também uma matriz solução fundamental associada à equação. No entanto, a não ser que a matriz S seja a matriz identidade, $S(t)$ não é a matriz e^{At} , visto que $S(0)$ não é a matriz identidade.

- Dada qualquer matriz A , a matriz e^{At} é a única matriz solução fundamental associada à equação $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}$, $S(t)$, que verifica $S(0) = I$.
- Conhecida qualquer matriz solução fundamental, $S(t)$, associada à equação $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}$, tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0)$$

Exemplo 1

Determinar a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos escrever a equação na forma matricial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

e já sabemos que a solução do PVI é dada por

$$\mathbf{Y}(t) = e^{At}\mathbf{Y}(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de e^{At}

Os valores próprios da matriz A são ± 2 (pelo que podemos concluir desde já que a matriz A é diagonalizável).

O vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$ é uma solução **não nula** da equação

$$(A - 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = b$$

pelo que podemos escolher, por exemplo $v_1 = (1, 1)$.

O vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = -2$ é uma solução **não nula** da equação

$$(A + 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow b = -3a$$

pelo que podemos escolher, por exemplo $v_2 = (1, -3)$. Assim teremos

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

pelo que

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Calculada a matriz e^{At} , a solução do PVI é

$$\mathbf{Y}(t) = e^{At} \mathbf{Y}(0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Tal como foi observado, a matriz

$$S e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

é também uma matriz solução fundamental, pelo que poderíamos escrever a solução geral da equação

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & -3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

e à posteriori calcular as constantes c_1, c_2 de modo a que seja verificada a condição inicial (o que na prática corresponde a determinar a matriz S^{-1} e multiplicá-la pela condição inicial).

- **A é uma matriz não diagonalizável:**

A matriz A ($n \times n$) diz-se *não diagonalizável*, se A não admite n vectores próprios linearmente independentes. Neste caso, A não é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, não existem uma matriz diagonal Λ e uma matriz não singular S tais que $A = S\Lambda S^{-1}$.

Para determinar a matriz e^{At} , vamos precisar de algumas definições e resultados parciais.

Matriz Diagonal por Blocos

Uma matriz $n \times n$, é diagonal por blocos, se for da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & A_k \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

em que A_1, \dots, A_k são matrizes quadradas de dimensões $m_1 \times m_1, \dots, m_k \times m_k$, respectivamente, tendo-se $m_1 + \dots + m_k = n$.

Exemplo:

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal por blocos A_1, A_2, A_3 , em que

$$A_1 = [-1] \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponencial de uma matriz diagonal por blocos

Se A é diagonal por blocos, como em (1.62), então

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{A_2 t} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

Bloco de Jordan

Uma matriz $k \times k$ di-se um *bloco de Jordan* se for da forma

$$J_\lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$J_{-1}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad J_2^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad J_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exponencial de um Bloco de Jordan

Se J_λ é um bloco de Jordan de dimensão $k \times k$, então

$$e^{J_\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}e^{\lambda t} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \\ & & & & & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \\ 0 & & & & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

isto é, os elementos a_{ij} , $i, j = 1, \dots, k$ da matriz $e^{J_\lambda t}$ são da forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{se } i = j & \text{(diagonal principal)} \\ te^{\lambda t} & \text{se } i + 1 = j & \text{(diagonal acima da principal)} \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \text{se } i = j + 2 & \text{(2ª diagonal acima da principal)} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} & \text{se } i + k - 1 = j & \text{((k-1) esima diagonal acima da principal)} \\ 0 & \text{se } i < j & \text{(abaixo da diagonal principal)} \end{cases}$$

Exemplo:

Para os blocos de Jordan do exemplo anterior tem-se que

$$\exp(J_{-1}^2 t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \exp(J_2^3 t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \exp(J_0^4 t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exponencial de uma matriz não diagonalizável

Seja A uma matriz, $n \times n$, não diagonalizável. Demonstra-se que,

$$\text{se } A \text{ é não diagonalizável então } A = SJS^{-1}$$

em que J é uma matriz diagonal por blocos de Jordan, isto é

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{m_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & J_{\lambda_2}^{m_2} & \mathbf{0} & & \\ & & \cdot & & \\ \mathbf{0} & & & \cdot & \\ & & & \mathbf{0} & J_{\lambda_k}^{m_k} \end{pmatrix}$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são valores próprios de A com multiplicidades algébricas m_1, \dots, m_k , respectivamente, (multiplicidade enquanto raízes do polinómio característico) e multiplicidade geométrica 1 (cada valor próprio $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tem um único vector próprio associado v_1, \dots, v_k , respectivamente) ¹².

A matriz S é também formada por k “blocos” de colunas

$$S = \left[\begin{array}{c|ccc|c} & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \hline S_1 & \cdot & \cdot & \cdot & S_k \\ \hline & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array} \right]$$

em que, para $i = 1, \dots, k$

$$S_i = \left[\begin{array}{c|c|cc|c} & & \cdot & \cdot & \\ \hline v_i & v_i^{G_1} & \cdot & \cdot & v_i^{G_{m_i-1}} \\ \hline & & \cdot & \cdot & \end{array} \right]$$

sendo v_i o vector próprio associado ao valor próprio λ_i , e $v_i^{G_j}$, $j = 1, \dots, m_i - 1$, vectores próprios generalizados, i.e., verificando as equações

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_1} = v_i$$

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_2} = v_i^{G_1}$$

$$(A - \lambda_i I)v_i^{G_3} = v_i^{G_2} \dots$$

até se calcularem $m_i - 1$ vectores próprios generalizados.

Exemplo:

Determinar e^{At} sendo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

¹²A lista de valores próprios, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, pode conter repetições. Nesse caso se, por exemplo, $\lambda_2 = \lambda_1$ (e $\lambda_j \neq \lambda_1$, para $j \geq 3$) então λ_1 tem dois vectores próprios associados linearmente independentes, v_1 e v_2 (multiplicidade geométrica igual a 2) e $m_1 + m_2$ é a multiplicidade algébrica de λ_1 .

Dado que a matriz não é nem diagonal, nem um bloco de Jordan (ou afim) nem diagonal por blocos, teremos que determinar e^{At} pelo processo usual de cálculo de valores e vectores próprios. Os valores próprios de A são as soluções de

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^3 = 0$$

Tem-se então que -2 é o valor próprio de A com multiplicidade algébrica 3. Note-se que só depois de calcular a sua multiplicidade geométrica (número de vectores próprios linearmente independentes associado a -2) poderemos concluir se A é diagonalizável (se a mult. geom. for = 3) ou não diagonalizável (se a mult. geom. for = 2 ou = 1). Os vectores próprios associados a -2 são as soluções não nulas de

$$(A + 2I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v = (a, b, c) = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0)$$

Conclui-se que a multiplicidade geométrica do valor próprio é 1, ou seja admite apenas um vector próprio independente, que por exemplo pode ser $v = (1, 0, 0)$. Sendo assim a matriz A é não diagonalizável, pelo que é semelhante a uma matriz formada por um único bloco de Jordan, ou seja:

$$A = SJS^{-1}$$

em que

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & | & | \\ 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & | & | \end{bmatrix}$$

sendo v_1 e v_2 vectores próprios generalizados de v . O primeiro vector próprio generalizado é solução não nula de

$$(A + 2I)v_1 = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v_1 = (a, b, c) = (a, -1, 1) = a(1, 0, 0) + (0, -1, 1)$$

Podemos então escolher, por exemplo, $v_1 = (0, -1, 1)$. O segundo vector próprio generalizado é solução não nula de

$$(A + 2I)v_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$v_2 = (a, b, c) = (a, 1, 0) = a(1, 0, 0) + (0, 1, 0)$$

Podemos então escolher, por exemplo, $v_2 = (0, 1, 0)$. Em consequência

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por ser um bloco de Jordan tem-se que

$$e^{Jt} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & -t + 1 & -t \\ 0 & t & t + 1 \end{bmatrix}$$

Pela teoria das equações vectoriais lineares, o espaço de soluções da equação $X' = AX$, tem dimensão n , pelo que existem n funções vectoriais linearmente independentes X_1, \dots, X_n (que são as colunas de uma matriz solução fundamental) e como tal a solução geral de $X' = AX$ é da forma

$$X(t) = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n \quad , \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_1^1 \\ \vdots \\ x_{n-1}^1 \end{bmatrix} + \dots + c_n \begin{bmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ \vdots \\ x_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

Dado que para escrever a solução da equação $P(D)y = 0$ apenas precisamos de conhecer y , então a solução geral da equação homogénea $P(d)y = 0$ é uma combinação linear das primeiras componentes das funções vectoriais X_1, \dots, X_n .

Podemos então concluir que o espaço das soluções da equação

$$P(D)y = 0 \tag{1.63}$$

tem dimensão n , e como tal, a sua solução geral é da forma

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são constantes reais, e y_1, \dots, y_n são n soluções linearmente independentes da equação.

1.8 Apêndice 2 - Transformada de Laplace

1.8.1 Definição e Propriedades

Definição da Transformada de Laplace

Seja $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Define-se a *Transformada de Laplace* de f , como sendo a função de variável complexa

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1.64}$$

Por vezes usa-se a notação $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ para representar $\mathcal{L}\{f\}(s)$, em situações em que se designa a função f pela fórmula que a define.

Domínio da Transformada de Laplace

Se a função f for seccionalmente contínua em qualquer $[0, T]$, com $T \in \mathbb{R}^+$ e verificar

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.65)$$

para certas constantes $M > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace de f está bem definida no semi-plano complexo $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Demonstração: Para qualquer $t > 0$ e $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > \alpha \Leftrightarrow \alpha - \operatorname{Re} s < 0$:

$$|e^{-st} f(t)| = |e^{(-\operatorname{Re} s)t}| |e^{-i(\operatorname{Im} s)t}| |f(t)| \leq e^{(-\operatorname{Re} s)t} M e^{\alpha t} = M e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t}$$

Então, para $\operatorname{Re} s > \alpha$:

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty M e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t} dt = M \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(\alpha - \operatorname{Re} s)t}}{\alpha - \operatorname{Re} s} \Big|_0^R = \frac{M}{\operatorname{Re} s - \alpha}$$

□

Nota: Se $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, então podemos definir a transformada de Laplace de f pela equação (1.64), e a mesma estará bem definida para $\operatorname{Re} s > \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ é obtido a partir da condição de convergência (1.65).

Exemplo:

Sendo $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, (ou $a \in \mathbb{C}$) tem-se que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_{t=0}^R = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

Como caso particular

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \mathcal{L}\{e^{0t}\}(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Função de Heaviside

Sendo $c \in \mathbb{R}$, define-se a *função de Heaviside* (centrada em c) por

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

Se $c = 0$, escreve-se simplesmente $H(t) \stackrel{\text{def}}{=} H_0(t)$. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $H_c(t) = H(t - c)$.

Exemplo: (Transformada de Laplace da função de Heaviside)

Se $c \geq 0$

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\}(s) = \int_0^\infty H(t - c) e^{-ts} dt = \int_c^\infty e^{-ts} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{e^{-ts}}{s} \Big|_c^N = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Propriedades Elementares da Transformada de Laplace:

Assumindo que as funções f e g admitem transformadas de Laplace bem definidas numa região $\text{Re } s > a$ (para algum $a \in \mathbb{R}$):

(1) Linearidade

$$\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$$

e para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s)$$

Em consequência, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s)$$

(2) Translação da Transformada de Laplace Para $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s + a)$$

(3) Transformada de Laplace da Translação Para $c \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{H(t - c)f(t - c)\}(s) = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(4) Derivada da Transformada de Laplace Para $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}\{f(t)\}(s)) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

(5) Transformada de Laplace da Derivada

Se f admite derivada seccionalmente contínua em $[0, \infty[$ e $\text{Re } s > 0$ então:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Então, aplicando $n \in \mathbb{N}$ vezes a propriedade anterior, se f admite derivadas seccionalmente contínuas até à ordem n em $[0, \infty[$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = -f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) \dots - s^{n-2} f'(0) - s^{n-1} f(0) + s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Demonstração:

(1) A propriedade é verdadeira devido à linearidade dos integrais impróprios.

(2)
$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} f(t) dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s + a)$$

(3) Vamos provar o resultado por indução. No caso $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st} f(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt \\ &= -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) \end{aligned}$$

Admitindo que a propriedade é válida para $n - 1$, então (e usando o caso $n = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \right) = \frac{d}{ds} \left((-1)^{n-1} \mathcal{L}\{t^{n-1} f(t)\}(s) \right) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{t^{n-1} f(t)\}(s) = (-1)^{n-1} (-1) \mathcal{L}\{t(t^{n-1} f(t))\}(s) \\ &= (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) \end{aligned}$$

(4) Como $H(t - c) = 0$ para $t \in [0, c]$:

$$\mathcal{L}\{H(t - c)f(t - c)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} H(t - c)f(t - c) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} f(t - c) dt$$

Fazendo $\theta = t - c$ no último integral, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{H(t - c)f(t - c)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s(\theta+c)} f(\theta) d\theta = e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-s\theta} f(\theta) d\theta = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(5) Integrando por partes (e atendendo a que, por hipótese, $\operatorname{Re} s > 0$):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Exemplos

a) Para $b \in \mathbb{R}$, e usando a linearidade da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ib} + \frac{1}{s + ib} \right) = \frac{s}{s^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i}\right\}(s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - ib} - \frac{1}{s + ib} \right) = \frac{b}{s^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

b) Para a e $b \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da translação da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s + a) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > -a$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s + a) = \frac{b}{(s + a)^2 + b^2}, \quad \operatorname{Re} s > -a$$

c) Se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da derivada da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

Particularizando o resultado anterior para $a = 0$, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

d) Por aplicação da propriedade da transformada de Laplace da translação, determinar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-2s} \frac{1}{s^2} = e^{-2s} \mathcal{L}\{t\}(s) = \mathcal{L}\{H(t-2)(t-2)\}(s)$$

1.8.2 Aplicações da Transformada de Laplace às equações diferenciais

Vamos introduzir um método que permite resolver um problema de valor inicial para uma equação linear de ordem n , de coeficientes constantes. Para tal, vamos usar a Transformada de Laplace para obter a solução de problemas de valor inicial do tipo:

$$\begin{cases} y^n + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(t) \\ y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1} \end{cases} \quad (1.66)$$

1. Aplicar a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial do problema (1.66):

$$\mathcal{L}\{y^n + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)$$

2. Aplicando as propriedades da transformada de Laplace, e com

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

obtém-se

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)}(B(s) + Q(s))$$

onde $P(s)$ é o polinómio característico associado a (1.66), $B(s)$ a transformada de Laplace de $b(t)$ e $Q(s)$ um polinómio de grau menor ou igual que $n-1$. Quando as condições iniciais são nulas, $Q(s) = 0$.

3. Finalmente, determinar a função $y(t)$ tal que

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s).$$

Em consequência:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$$

Diz-se que $y(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$. Utilizando este método, obtém-se a solução, $y(t)$, do PVI (1.66).

Exemplo:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + y = b(t) \quad , \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

onde $b(t)$ é definida pela expressão

$$b(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1 \end{cases} = (1 - H(t-1)) t^2 = t^2 - H(t-1) t^2$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + y\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s).$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da translação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{b(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s) - \mathcal{L}\{H(t-1)t^2\}(s) = \frac{2}{s^3} - \mathcal{L}\{H(t-1)((t-1)+1)^2\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \mathcal{L}\{(t+1)^2\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \mathcal{L}\{t^2 + 2t + 1\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Por outro, usando a linearidade:

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + y\}(s) = \mathcal{L}\{\ddot{y}\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da derivada,

$$-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

Usando a notação $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, e atendendo a que $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, tem-se então:

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right),$$

ou seja:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \left(\frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \right)$$

Sejam $F_1(s)$ e $F_2(s)$ tais que:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^3(s^2 + 1)}}_{F_1(s)} + \underbrace{e^{-s} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) \right)}_{F_2(s)}$$

Em $F_1(s)$, fazendo separação em fracções simples e aplicando as propriedades da Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{-2}{s} + \frac{0}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s+0}{s^2+1} \\ &= \frac{-2}{s} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s} + 2 \frac{s}{s^2+1} \\ &= -2\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 2\mathcal{L}\{\cos t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{-2 + t^2 + 2 \cos t\}(s) \end{aligned}$$

Tratando $F_2(s)$ de forma similar:

$$\begin{aligned} F_2(s) &= e^{-s} \left(\frac{-1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{s-2}{s^2+1} \right) \\ &= e^{-s} \left(\frac{-1}{s} - 2 \frac{d}{ds} \frac{1}{s} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} - 2 \frac{1}{s^2+1} \right) \\ &= e^{-s} \left(-\mathcal{L}\{1\}(s) + 2\mathcal{L}\{t\}(s) + \mathcal{L}\{t^2\}(s) + \mathcal{L}\{\cos t\}(s) - 2\mathcal{L}\{\sin t\}(s) \right) \\ &= e^{-s} \mathcal{L}\{-1 + 2t + t^2 + \cos t - 2 \sin t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{ H(t-1) \left(-1 + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2 \sin(t-1) \right) \right\}(s) \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$Y(s) = \mathcal{L}\left\{ -2 + t^2 + 2 \cos t + H(t-1) \left(-1 + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2 \sin(t-1) \right) \right\}(s)$$

e assim a solução do PVI é

$$\begin{aligned} y(t) &= -2 + t^2 + 2 \cos t + H(t-1) \left(-1 + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2 \sin(t-1) \right) \\ &= \begin{cases} -2 + t^2 + 2 \cos t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ -3 + t^2 + 2 \cos t + 2(t-1) + (t-1)^2 + \cos(t-1) - 2 \sin(t-1) & \text{se } t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1.8.3 Distribuição Delta de Dirac

A delta de Dirac é a distribuição que verifica

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Se f é contínua em $t = 0$ então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0)$$

Mais genericamente, podemos definir a distribuição delta de Dirac centrada em um dado $c \in \mathbb{R}$ por:

$$\delta_c(t) = \delta(t - c)$$

A distribuição $\delta_c(t)$ verifica, então:

a) $\delta_c(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t) dt = 1$

c) Se f é contínua em c então $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t)f(t) dt = f(c)$

Desta forma:

$$\mathcal{L}\{\delta_c(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(t)e^{-st} dt = e^{-cs}.$$

Exemplo:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2\delta(t - 2) \quad , \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\{\ddot{y} + 2\dot{y} + y\}(s) = \mathcal{L}\{2\delta(t)\}(s) = 2e^{-2s}$$

Usando a linearidade, a propriedade da transformada de Laplace da derivada e a notação $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$

$$-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2Y(s) + 2(-y(0) + sY(s)) + Y(s) = 2e^{-2s},$$

o que é equivalente a

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 2e^{-2s},$$

ou seja

$$Y(s) = e^{-2s} \frac{2}{(s+1)^2} = e^{-2s} \mathcal{L}\{2te^t\}(s) = \mathcal{L}\{2H(t-2)(t-2)e^{-(t-2)}\}(s)$$

Consequentemente, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = 2H(t-2)(t-2)e^{-(t-2)}.$$

1.8.4 Inversão da Transformada de Laplace

Teorema de Inversão da Transformada de Laplace

Seja $F(s)$ uma função analítica em \mathbb{C} excepto num conjunto finito de singularidades (isoladas), $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \mathbb{C}$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $F(s)$ é analítica no semi-plano $\text{Re } s \geq \alpha$ (isto é, α é maior que qualquer um dos valores $\text{Re } s_1, \text{Re } s_2, \dots, \text{Re } s_n$). Suponhamos também que $F(s)$ verifica, para certos $M, \beta, \hat{R} \in \mathbb{R}^+$:

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^\beta}, \quad \text{se } |s| \geq \hat{R} \quad (1.67)$$

Então

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{st}F(s), s_j) \quad (1.68)$$

satisfaz $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ para $\text{Re } s > \alpha$.

Demonstração: Seja $R > |\alpha|$ tal que todas as singularidades de $F(s)$ estão no interior da circunferência $|s| = R$ (isto é, $|s_j| < R$, para $j = 1, 2, \dots, n$).

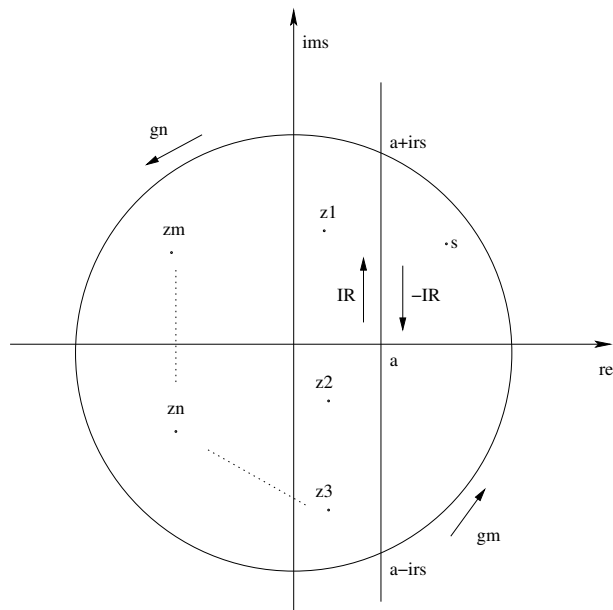


Figura 1.10: Demonstração do teorema de inversão da transformada de Laplace.

Sejam

$$\begin{aligned} \gamma_R^+ &= \{s \in \mathbb{C} : |s| = R \text{ e } \text{Re } s \geq \alpha\} \\ \gamma_R^- &= \{s \in \mathbb{C} : |s| = R \text{ e } \text{Re } s \leq \alpha\} \end{aligned}$$

(em que a circunferência é sempre percorrida no sentido directo) e I_R o segmento que une os extremos de ambas as curvas, com início em $\alpha - i\sqrt{R^2 - \alpha^2}$ e fim em $\alpha + i\sqrt{R^2 - \alpha^2}$. Considere-se as curvas de Jordan:

$$\Gamma_R^+ = \gamma_R^+ + (-I_R) \quad , \quad \Gamma_R^- = \gamma_R^- + I_R$$

Note que ambas as curvas são percorridas no sentido directo.

Aplicando o teorema dos resíduos à função $e^{st}F(s)$, que é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ (considera-se $t \in \mathbb{R}$ como parâmetro):

$$\int_{\Gamma_R^-} e^{st}F(s) ds = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{st}F(s), s_j) = 2\pi i f(t) \quad (1.69)$$

A transformada de Laplace de f (nos pontos $s \in \mathbb{C}$ onde o limite que define o integral impróprio converge) será então dada por:

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} \left(\int_{\Gamma_R^-} e^{zt}F(z) dz \right) dt.$$

Pelo teorema de Fubini:

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^-} \left(\int_0^N e^{(z-s)t} dt \right) F(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{(z-s)N} - 1}{z - s} F(z) dz.$$

Para $\text{Re } s > \alpha$ e notando que, para $z \in \Gamma_R^-$, $\text{Re } z \leq \alpha$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| e^{(z-s)N} \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} e^{(\alpha - \text{Re } s)N} = 0,$$

pelo que, para esses valores de s , o limite que define $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe e:

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = - \int_{\Gamma_R^-} \frac{F(z)}{z - s} dz.$$

Considera-se agora R suficientemente grande, de tal forma que — para além das singularidades s_1, s_2, \dots, s_n — também s está no interior da circunferência $|z| = R$, e a estimativa (1.67) é válida para $|z| = R$ (ou seja, $R \geq \hat{R}$). Aplicando a fórmula integral de Cauchy à curva Γ_R^+ e à função F (que é analítica nessa curva e no seu interior):

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = - \int_{\Gamma_R^-} \frac{F(z)}{z - s} dz - \underbrace{\int_{\Gamma_R^+} \frac{F(z)}{z - s} dz}_{= 0} + 2\pi i F(s) = 2\pi i F(s) - \int_{|z|=R} \frac{F(z)}{z - s} dz.$$

Como:

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{F(z)}{z - s} dz \right| \leq \int_{|z|=R} \frac{|F(z)|}{|z - s|} |dz| \leq \frac{M/R^\beta}{R - |s|} \int_{|z|=R} |dz| = \frac{2\pi RM}{R^\beta(R - |s|)} \rightarrow 0$$

quando $R \rightarrow \infty$, concluímos que,

$$2\pi i \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi i F(s) - \int_{|z|=R} \frac{F(z)}{z - s} dz = 2\pi i F(s),$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s).$$

□.

Este teorema de inversão pode ser útil quando $F(s)$ é uma função racional, isto é, $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinómios. Neste caso, e como vimos na subsecção ??, basta que o grau de $Q(s)$ seja maior que o de $P(s)$ para a condição (1.67) seja satisfeita.

Exemplo 1:

Determinar a transformada de Laplace inversa de $F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$.

Como $s^2 + s - 6 = (s+3)(s-2)$, $e^{st}F(s) = e^{st} \frac{s+1}{(s+3)(s-2)}$ tem por singularidades $s = 2$ e $s = -3$, sendo ambas pólos simples. Note que o grau de $s^2 + s - 6$ é maior que o de $s - 1$. Pelo teorema de inversão da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+3)(s-2)}\right\} = \text{Res}(e^{st}F(s), 2) + \text{Res}(e^{st}F(s), -3)$$

Os resíduos dos pólos simples são:

$$\text{Res}(G(s), 2) = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s+1}{s+3} e^{st} = \frac{3}{5} e^{2t}$$

$$\text{Res}(G(s), -3) = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{s+1}{s-2} e^{st} = \frac{2}{5} e^{-3t}.$$

Assim sendo,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{3}{5} e^{2t} + \frac{2}{5} e^{-3t}.$$

Exemplo 2:

Sendo $F(s)$ uma função que verifica as condições do teorema de inversão da transformada de Laplace, provar que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad \text{para } t > 0. \quad (1.70)$$

Notamos em primeiro lugar que a equação (1.69) é válida para qualquer R muito grande; tomando o limite em ambos os membros de (1.69) quando $R \rightarrow \infty$, então:

$$2\pi i f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{I_R} e^{st} F(s) ds + \int_{\gamma_R^-} e^{st} F(s) ds \right) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} F(s) ds + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{st} F(s) ds$$

Resta provar que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{st} F(s) ds = 0$.

A curva γ_R^- é o arco de circunferência parametrizado por $s(\theta) = Re^{i\theta}$, com $\frac{\pi}{2} - \kappa \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + \kappa$ e $\kappa = \arctg \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}}$. Podemos escrever $\gamma_R^- = C_R^1 + S_R + C_R^2$ ¹³ onde o parâmetro θ satisfaz:

$$\frac{\pi}{2} - \kappa < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{para } z(\theta) \in C_R^1;$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \text{para } z(\theta) \in S_R;$$

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} + \kappa \quad \text{para } z(\theta) \in C_R^2.$$

Para estimar os integrais ao longo de $C_R^1 + C_R^2$, tendo em conta que $|e^{ts}| = e^{t \operatorname{Re} s} \leq e^{t\alpha}$ para $s \in \gamma_R^-$:

$$\left| \int_{C_R^- + C_R^+} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{Me^{t\alpha}}{R^\beta} \int_{C_R^- + C_R^+} |ds| = \frac{Me^{t\alpha}}{R^\beta} 2R|\kappa|$$

Como $|\arctg x| \leq |x|$, então $R|\kappa| = R \left| \arctg \frac{\alpha}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} \right| \leq R \frac{|\alpha|}{\sqrt{R^2 - \alpha^2}} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1 - \alpha^2/R^2}}$, pelo que:

$$\left| \int_{C_R^- + C_R^+} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{2Me^{t\alpha}|\alpha|}{R^\beta \sqrt{1 - \alpha^2/R^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty$$

O integral ao longo de S_R pode ser estimado usando o método da prova do lema de Jordan. Em primeiro lugar,

$$\begin{aligned} \int_{S_R} |e^{ts}| |ds| &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |e^{tR \cos \theta}| |e^{itR \sin \theta}| R d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR \cos \theta} R d\theta = \int_0^\pi e^{tR \cos(\omega + \frac{\pi}{2})} R d\omega = \int_0^\pi e^{-tR \sin \omega} R d\omega. \end{aligned}$$

Usando agora as estimativas da subsecção ?? (equações (??) e (??)), obtém-se:

$$\int_{S_R} |e^{ts}| |ds| \leq \frac{\pi}{t} \quad \text{para } t > 0.$$

Então, para $t > 0$,

$$\left| \int_{S_R} f(z) e^{ts} ds \right| \leq \frac{M}{R^\beta} \int_{S_R} |e^{ts}| |ds| \leq \frac{M\pi}{R^\beta t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } R \rightarrow \infty$$

¹³A ideia desta decomposição baseia-se no facto de os comprimentos das curvas C_R^1 e C_R^2 não tenderem para ∞ quando $R \rightarrow \infty$, o que permite uma majoração mais simples dos integrais correspondentes. Por outro lado, o integral ao longo de S_R pode ser estimado pelo método que foi usado na prova do lema de Jordan.