Aula Prática (online)

12/12/2025

Ficha 10

Problema 2 (versão mais simples)

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

definida por $f(x) = \pi - |x|$

calcular a série de Fourier em $[-\pi, \pi]$ e aproveitar o resultado para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Vamos começar por estudar a simetria da função. Visto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Já que $b_n = 0, \forall n$.

Então

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$$

e para $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{u}{(\pi - x)}\,\underset{v'}{\cos(nx)}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}(\pi - x)\underbrace{\operatorname{sen}(nx)\Big|_0^{\pi}}_{0} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

Escolhendo um valor de $x \in [-\pi, \pi]$ apropriado (que se consegue calcular facilmente $\cos(nx)$)

temos que

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} \left(1-(-1)^n\right) \cos(nx) = f(x)$$

Escolhendo $x = 0$

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n} \frac{2}{\pi n^2} \left(1-(-1)^n\right) = \pi$$

visto

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

temos que

$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{\cancel{2}4}{\pi n^2} = \frac{\pi}{2}$$

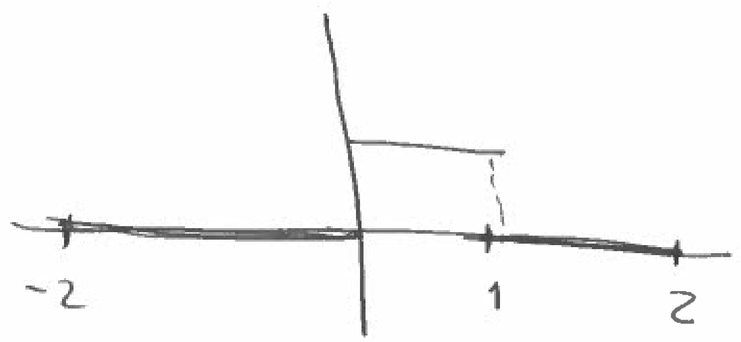
Problema 5 Seja $f: [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-2,0] \\ 1 & \text{se } x \in]0,1] \\ 2 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$$

Determinar a série de Fourier de f em $[-2,2]$ e indique a sua soma.

Começamos por estudar a simetria da função $f(x)$.



a função não é par nem impar pelo que a sua série de Fourier é completa

Tem-se então que

$$SFf(x) = \frac{1}{4} + \sum_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \right]$$

e a soma da série será

$$SFf(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 < x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{f(2) + f(-2)}{2} & \text{se} \quad x = \pm 2 \\ \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} & x = 0 \\ \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} & x = 1 \end{cases}$$

Pontos de continuidade

ou seja

$$SFf(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [-2, 0[\cup]1, 2] \\ 1 & \text{se} \quad x \in]0, 1[\\ 1/2 & x = 0 \lor x = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

Pelo que

$$SF_{\cos} f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_1 \frac{2}{n^2 \pi} \left((-1)^n - 1 \right) \cos(nx)$$

A soma tem que ser feita com a extensão par (porque é uma série de cosenos) ao intervalo $[-\pi, \pi]$

$$\text{Prol } f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -x & \text{se } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$