DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEIC-A, LEMat, LEQ

Teste 2 (Versão A)

26 de Novembro de 2025, 20h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. (a) (2 val.) Determine os valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{rot}\big(ax, -bz, cy\big) = 0$.
Resolução:

Como $F(x,y,z) = (ax, -bz, cy)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{rot} F$ está bem definido em $\mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax & -bz & cy \end{vmatrix} \\ &= \big(c+b, 0, 0\big). \end{aligned}$$

Desta forma, $\operatorname{rot} F = 0$ se e só se $c = -b$. O conjunto dos valores de (a,b,c) tais que $\operatorname{rot} F = 0$ é:

$$\big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c = -b\big\}.$$

(b) (2 val.) Mostre que para qualquer campo vectorial F de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Sendo $F = (F_1, F_2, F_3)$, onde $F_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$ ou 3) então, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F)(x,y,z) &= \operatorname{div} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right), \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

A última igualdade resulta da aplicação do teorema de Schwarz às funções F_1, F_2 e F_3 (que são de classe C^2).

2. Considere a superfície S parametrizada por:

$$g(u,v) = \big(2u,\ vu,\ 1-2v\big) \qquad \text{para } \ u^2+v^2<4.$$

(a) (2 val.) Verifique que $P=(2,1,-1)$ pertence à superfície e determine a equação cartesiana do plano tangente a S em P.

Resolução:

P pertence à superfície se estiver no contradomínio da parametrização; isto é, se existir $(u,v)\in T=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u^2+v^2<4\big\}$ tal que $g(u,v)=(2,1,-1)$. Ora:

$$\begin{cases} 2u=2 \\ vu=1 \\ 1-2v=-1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}$$

Assim, $P=(2,1,-1)=g(1,1)$. Tendo em conta que

$$\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 2 & v & 0 \\ 0 & u & -2 \end{vmatrix} = (-2v,4,2u) \tag{1}$$

então um vector normal a S em $P=g(1,1)$ é $(-2,4,2)$: Assim, a equação cartesiana do plano tangente a S em P é:

$$\begin{aligned} (-2,4,2)\cdot\big((x,y,z)-(2,1,-1)\big) &\Leftrightarrow -2(x-2)+4(y-1)+2(z+1)=0 \\ &\Leftrightarrow -2x+4y+2z+2=0 \Leftrightarrow x-2y-z=1. \end{aligned}$$

(b) (3 val.) Calcule a área de S.

Resolução:

Utilizando a equação (1):

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\| = \big\|\big(-2v,4,2u\big)\big\| = \sqrt{16+4(u^2+v^2)}.$$

A área de S é:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S dS = \iint_T \left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\| du\,dv \\ &= \iint_T \sqrt{16+4(u^2+v^2)}\,du\,dv. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares $u=r\cos\theta$, $v=r\operatorname{sen}\theta$, o domínio T representado nas novas coordenadas fica o conjunto $\widetilde{T}=\big\{(r,\theta): 0<\theta<2\pi,\ 0<r<2\big\}$. Desta forma:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 \big(16+4r^2\big)^{1/2} r\,dr\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\frac{1}{8}\int_0^3 \big(16+4r^2\big)^{1/2} 8r\,dr \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\big(16+4r^2\big)^{3/2}\Big|_{r=0}^{2} = \frac{\pi}{6}\big(32^{3/2}-16^{3/2}\big) = \frac{\pi}{6}\big(2^7\sqrt{2}-2^6\big) \\ &= \frac{2^5\pi}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big) = \frac{32\pi}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big). \end{aligned}$$

3. Considere o campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z)=\left(e^{y+z^2},\ y,\ e^{x+y^2}\right)$.

(a) (1 val.) Calcule a divergência de F.

Resolução:

$$\operatorname{div} F=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{x+y^2}\right)=1.$$

(b) (2 val.) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através da superfície que é a fronteira do sólido

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ y>\sqrt{x^2+z^2}\ \text{ e }\ y<2\right\}.$$

na direcção da normal exterior ao sólido.

Resolução:

O sólido é a parte do cone $y=\sqrt{x^2+z^2}$ entre o vértice, situado na origem e o plano $y=2$ — e onde o eixo de rotação é o eixo dos y. Logo, V é um domínio quase-regular. Temos ainda que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Pelo teorema da divergência:

$$\iint_{\partial V} F\cdot\nu\,dS\ =\ \iiint_V \operatorname{div} F\,dV\ =\ \iiint_V dV\ =\ \operatorname{Vol}_3(V)$$

O sólido é um cone com altura 2 e raio da base igual a 2, pelo que:

$$\iint_{\partial V} F\cdot\nu\,dS\ =\ \frac{1}{3}\cdot\pi 2^2\cdot 2=\frac{8\pi}{3}.$$

Em alternativa, pode calcular o volume do cone usando coordenadas cilíndricas $x=\rho\cos\theta$, $y=y$, $z=\rho\operatorname{sen}\theta$:

$$\operatorname{Vol}_3(V)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_\rho^2 \rho\,dy\,d\rho\,d\theta=2\pi\int_0^2(2\rho-\rho^2)d\rho=2\pi\left(\rho^2-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_{\rho=0}^{2}=\frac{8\pi}{3}.$$

(c) (3 val.) Calcular o fluxo de F através da superfície

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ y=\sqrt{x^2+z^2}\ \text{ e }\ y<2\right\}.$$

na direcção da normal com segunda componente negativa.

Resolução:

A fronteira do sólido V é

$$\partial V=S\cup S_B$$

onde S_B é a intersecção do cone $y>\sqrt{x^2+z^2}$ com o plano $y=2$, ou seja:

$$S_B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+z^2<4\wedge y=2\right\}.$$

Note que ν coincide com a normal unitária exterior a V. Pela alínea (a):

$$\iint_S F\cdot\nu dS+\iint_{S_B}F\cdot\nu dS=\iiint_V \operatorname{div} F dV=\frac{8\pi}{3}.$$

Calculamos agora o fluxo de F através de S_B. Em S_B, $\nu = \mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $F(x,y,z) = (\cdots, 2, \cdots)$, pelo que $F \cdot \nu = 2$. Isto implica que

$$\iint_{S_B} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_{S_B} 2 \, dS \;=\; 2\,\mathrm{Vol}_2(S_B) \;=\; 2 \cdot \pi 2^2 = 8\pi.$$

Concluímos que:

$$\iint_{S} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_{\partial V} F \cdot \nu \, dS - \iint_{S_B} F \cdot \nu \, dS \;=\; \frac{8\pi}{3} - 8\pi \;=\; -\frac{16\pi}{3}.$$

4. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y f(t,y), \qquad y(0) = 3,$$

onde f é uma função de classe C^1 definida em $\mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(t,y) \geq \dfrac{y}{3}$.

(a) (2 val.) Mostre que o problema tem solução única local.

Resolução:

O problema de valor inicial é

$$\frac{dy}{dt} = h(t,y), \qquad y(0) = 3 \tag{2}$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $h(t,y) = y f(t,y)$ no domínio. Note que h é da classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard, o PVI (2) tem solução única $y :]-\beta, \beta[\to \mathbb{R}$ (para algum $\beta > 0$).

(b) (3 val.) Estude o intervalo máximo de solução do problema. Deve indicar o comportamento da solução na vizinhança de cada extremo finito desse intervalo.

Resolução:

Verifica-se imediatamente que $y(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação diferencial. Pela unicidade de solução (garantida pelo teorema de Picard), a solução do PVI (2) verifica obrigatoriamente:

$$y(t) > 0 \qquad \forall t \in I_{\text{max}}.$$

Seja $I_{max} =]a, b[$. Note que o domínio de h é $\mathbb{R}^2$; pelo teorema de extensão de solução, a solução ou explode quando $t \to b^-$ ou $b = +\infty$ (e o mesmo acontece em a). Tendo em conta a desigualdade anterior:

$$h(t,y) = y \underbrace{f(t,y)}_{\geq y/3} \geq y \cdot \frac{y}{3} \geq \frac{y^2}{3} \tag{3}$$

pelo que $\dfrac{dy}{dt} \geq 0$, ou seja, a solução $y(t)$ é uma função crescente. Assim, para $t \leq 0$:

$$0 < y(t) \leq y(0) = 3.$$

Desta forma a solução não pode explodir quando $t \to a^+$. Concluímos que $a = -\infty$.
Considere-se o problema de valor inicial

$$u' = \frac{u^2}{3}, \qquad u(0) = 3.$$

Resolvendo esta equação separável:

$$\int \frac{1}{u^2} du = \int \frac{1}{3} dt + c \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{u} = \frac{t}{3} + c \qquad \Leftrightarrow \qquad u(t) = \frac{1}{-c - \frac{t}{3}}.$$

Usando a condição inicial, obtém-se $-c = \frac{1}{3}$, pelo que

$$u(t) = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{t}{3}} = \frac{3}{1-t}.$$

Pelo teorema de comparação de soluções (aplicável devido à desigualdade (3)) e, por outro lado, usando a solução acima:

$$y(t) \geq \frac{3}{1-t} \qquad \text{para} \quad t \geq 0.$$

Como $\lim_{t \to 1-} u(t) = +\infty$, então a solução explode:

$$\lim_{t \to b^-} y(t) = +\infty.$$

Desta forma, o intervalo máximo de solução é

$$I_{max} \;=\;]-\infty, b[\,.$$

onde $b \in]0, 1]$.