Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2022/23

Cursos: LEEC, LEIC

Teste 1 (Versão A)

27 de Outubro de 2022, 19h - 19h45

Resolução

1. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z) = \left(x^2, xy, z\right)$. Utilize o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot \nu \, dS$ através das seguintes superfícies.

[3,0 val.] (a) S é a fronteira do sólido $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - x^2 - y^2\right\}$, sendo ν a normal unitária exterior a E.

Resolução:

Dado que

- F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$;
- S é uma superfície fechada, orientável e quase regular;
- ν é a normal exterior a E,

estamos em condições de aplicar (como pedido) o teorema da divergência, e assim

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_E \operatorname{div} F \, dV = \iiint_E (3x+1) \, dV.$$

Usando coordenadas cilindricas $(x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$, temos

$$E \;=\; \left\{(\rho,\theta,z) \;:\; \rho \in [0,2]\,,\; \theta \in [0,2\pi] \text{ e } 0 < z < 4-\rho^2\right\},$$

pelo que

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_E (3x+1) \, dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-\rho^2} (3\rho\cos\theta + 1)\rho \, dz \, d\theta \, d\rho = 8\pi.$$

[3,0 val.] (b) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, z > 0\right\}$, com a normal unitária $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ tal que $\nu_3 > 0$.

Resolução:

Temos agora que S é a **superfície** do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$. Verificamos que S não é uma superfície fechada, e, para podermos aplicar o teorema da divergência (como pedido) temos que "tapar" a superfície. Para tal, consideremos $\Sigma = S \cup T$ em que

$$T \;=\; \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 < 4 \text{ e } z = 0\right\}.$$

Verifica-se que Σ é a fronteira do sólido E definido na alínea anterior; além disso,

$$N = N(x,y,z) = \begin{cases} \nu & \text{se} \quad (x,y,z) \in S \\ (0,0,-1) & \text{se} \quad (x,y,z) \in T \end{cases}$$

é a normal unitária exterior a E. Temos então que, pela alínea (a)

$$\iint_\Sigma F \cdot N\, dS = \iiint_E \operatorname{div} F\, dV = 8\pi.$$

Por outro lado, visto que $\Sigma = S \cup T$, teremos

$$\iint_\Sigma F \cdot N\, dS = \iint_S F \cdot \nu\, dS + \iint_T F \cdot (0,0,-1)\, dS$$

e, pelos cálculos anteriores,

$$8\pi = \iint_S F \cdot \nu\, dS + \iint_T \underbrace{(x^2, xy, z) \cdot (0,0,-1)}_{=0 \text{ em } T}\, dS,$$

o que implica que

$$\iint_S F \cdot \nu\, dS = 8\pi.$$

2. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por $G(x,y,z) = (xy, y, -x^2 + y^2 z^2)$.

[5,0 val.] (a) Calcule o fluxo do rotacional de G através da superfície dada por $x^2+y^2+z^2 = 5$ e $z > 1$, na direcção da normal com terceira componente positiva.

Resolução:

Sabemos que o fluxo do $\operatorname{rot} G$ através de S é $\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu\, ds$, em que ν é a normal unitária com o sentido indicado. Dado que

- G é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$;
- S é uma superfície elementar, orientável;
- o bordo de S,
$$\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 = 4\}$$
é uma curva de Jordan.

estamos nas condições de aplicar o teorema de Stokes, e assim

$$\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu\, ds = \oint_{\partial S} G(x,y,z) \cdot dg.$$

Para calcular o integral de linha, considera-se a parametrização

$$g(\theta) = (2\cos\theta, 2\text{sen}\,\theta, 1)$$

em que $\theta \in]0, 2\pi[$ (observe que atendendo ao sentido da normal a S indicada — apontando para cima — o bordo é percorrido em sentido directo). Então

$$\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu\, dS = \int_0^{2\pi} G(g(\theta)) \cdot g'(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (-8\text{sen}^2\theta\cos\theta + 4\text{sen}\,\theta\cos\theta)\, d\theta = 0.$$

[1,0 val.] (b) Determine o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que G é um potencial vectorial para F.

Resolução:

Queremos calcular uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F = \operatorname{rot} G$. Ou seja

$$F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y & -x^2 + y^2 z^2 \end{vmatrix} = \left(2yz^2, 2x, -x\right).$$

3. Considere a equação diferencial de 1ª ordem $xy' + 4y = x^2$.

[3,0 val.] (a) Determine a solução geral da equação.

Resolução:

Trata-se de uma equação linear que pode ser escrita na forma

$$y' + \underbrace{\frac{4}{x}}_{a(x)} y = \underbrace{x}_{b(x)}$$

Um factor integrante é

$$\mu(x) = e^{\int a(x)\,dx} = e^{4\log x} = x^4$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} y' + \frac{4}{x}y = x \quad & \Leftrightarrow \quad x^4y' + 4x^3y = x^5 \\ & \Leftrightarrow \quad x^4y' + (x^4)'y = x^5 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^4y\right) = x^5 \\ & \Leftrightarrow \quad x^4y = \frac{x^6}{6} + c \\ & \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{c}{x^4}\ ,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

[2,0 val.] (b) Calcule a solução da equação que verifica $y(1) = 2$, e indique o seu intervalo máximo de existência de solução.

Resolução:

Primeiro vamos calcular o valor de c para o qual a função calculada na alínea a) verifica $y(1) = 2$. Tem-se então que

$$2 = y(1) = \frac{1}{6} + c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{11}{6}$$

pelo que a solução do (PVI) é

$$y(x) = \frac{1}{6}\left(x^2 + \frac{11}{x^4}\right)$$

O intervalo máximo de existência de solução do PVI é o maior intervalo contido no domínio de continuidade de y' ao qual pertence o valor inicial $x_0 = 1$, ou seja

$$I_{\mathsf{max}} = \left]0, +\infty\right[.$$

[3,0 val.] 4. Considere o conjunto aberto

$$U = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 2\right\}.$$

Moste que para quaisquer campos escalares $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em U e tais que $f(\mathbf{x}) = 0$ e $g(\mathbf{x}) = 0$ quando $\|\mathbf{x}\| \geq 1$, se tem

$$\iiint_U \left(\operatorname{div} \nabla g\right) f \;=\; \iiint_U \left(\operatorname{div} \nabla f\right) g.$$

Sugestão: pode ser útil considerar o campo vectorial $f\,\nabla g - g\,\nabla f$.

Resolução:

Vamos aplicar o teorema da divergência ao campo vectorial $f\nabla g - g\nabla f$. Tendo em conta que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) &= \operatorname{div}\big(fg_x - gfx, fg_y - gf_y, fg_z - gf_z\big) \\
&= \cancel{f_x g_x} + fg_{xx} - \cancel{g_x f_x} - gf_{xx} + \cancel{f_y g_y} + fg_{yy} - \cancel{g_y f_y} - gf_{yy} \\
&\qquad + \cancel{f_z g_z} + fg_{zz} - \cancel{g_z f_z} - gf_{zz} \\
&= (g_{xx} + g_{yy} + g_{zz})f - (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})g \\
&= (\operatorname{div}\nabla g)f - (\operatorname{div}\nabla f)g
\end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência, e tendo em conta que f e g são nulas em $\partial U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 2\}$:

$$\iiint_U (\operatorname{div}\nabla g)f - \iiint_U (\operatorname{div}\nabla f)g = \iiint_U \operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = \iint_{\partial U} \underbrace{(f\nabla g - g\nabla f)}_{=0 \text{ em } \partial U} \cdot \nu \, dS = 0.$$