

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEIC-A, LEMat, LEQ

TESTE 1 (VERSÃO B)

15 DE OUTUBRO DE 2025, 20H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 45m.

### INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular.
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- O teste deve ser resolvido a **caneta** (azul ou preta).

| PERGUNTA | COTAÇÃO | CLASSIFICAÇÃO |
|----------|---------|---------------|
| 1        | 5       |               |
| 2        | 5       |               |
| 3        | 5       |               |
| 4        | 5       |               |
| Total    | 20 val. |               |

Nome: \_\_\_\_\_

Nº: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Sala: \_\_\_\_\_

1. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{3}{t}y = \frac{e^t}{t^2}, \quad y(1) = 2.$$

(a) (4 val.) Determine explicitamente a solução do PVI.

(b) (1 val.) O intervalo máximo de existência da solução do PVI é:

A.  $]0, +\infty[$

B.  $\mathbb{R}$

C.  $] -\infty, 0[$

D.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

E.  $[0, +\infty[$

(b) \_\_\_\_\_

2. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{3x^2}{y} + \frac{y^2 - x^3}{y^2} y' = 0 \quad , \quad y(0) = -2.$$

(a) (1 val.) Indique todos os conjuntos onde a equação é exacta.

- A.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$    B.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$    C.  $\mathbb{R}^2$    D.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$

(a) \_\_\_\_\_

(b) (3 val.) Determine a solução do PVI.

(c) (1 val.) Explícite a solução e indique o intervalo máximo de existência da solução do PVI.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (4 val.) Determine  $e^{At}$ .

(b) (1 val.) Calcule a solução de  $Y' = AY + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

2024/25, 15/10/2025

1º TESTE — B

LEAMB, LEBIOM, LEBIOL, LEMAT, LEQ

4. Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' - 3y = b(t)$$

em que  $b(t)$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ .

- (a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
- (b) (3 val.) Sendo  $b(t) = 8e^{-t}$  calcule a solução da equação que satisfaz  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 6$ .
- (c) (1 val.) Indique a função  $b(t)$  para a qual  $\varphi(t) = te^{3t} + e^{3t} + e^{-t}$  é uma solução particular da equação diferencial.

2025/26, 15/10/2025

1º TESTE — B

LEAMB, LEBIOM, LEBIOL, LEIC-A, LEMAT, LEQ