TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral III

## $1^{\text{o}}$ Semestre 2023/2024

**Curso:** LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

## Ficha de Problemas nº 9

### Teorema de Stokes e Potenciais Vectoriais

# 1 Exercícios Propostos

1. Considere o campo vectorial
$$F(x, y, z) = (y, z, x)$$
e à superfície $S$ igual ao hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva. Calculo o fluxo do $\operatorname{rot} F$ através de $S$ utilizando

   **(a)** A definição de fluxo.

   **(b)** O teorema de Stokes.

2. Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$ sendo

   (a) $S$ é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, em que se considera a normal $\nu$ com terceira componente positiva e
   $$F(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, xyz).$$

   (b) $S$ é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, em que se considera a normal $\nu$ com primeira componente positiva e
   $$F(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, (x^2 y^2 + 1)z, -y).$$

   (c) $S$ a superfície parametrizada por $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, $u > 0$, $v > 0$, $u + v < 1$, sendo $\nu$ a normal com terceira componente positiva e
   $$F(x, y, z) = (y, -x^2, z).$$

3. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, em que:

   (a) $C$ é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e
   $$F(x, y, z) = (y + z, -z, y)$$

(b) $C$ é a curva de intersecção do plano $x+z=5$ com o cilindro $x^2+y^2=9$, percorrida no sentido directo quando vista de cima e

$$F(x,y,z) = (xy, 2z, 3y)$$

(c) $C$ é o triângulo de vértices $A=(1,0,0)$, $B=(0,2,0)$ e $C=(0,0,1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante, e

$$F(x,y,z) \;=\; \big(x-z, y-x, z-xy\big).$$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $F$ ao longo da curva $C$, sendo:

(a) $C$ o bordo da superfície

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; y^2+z^2=1 \;,\; 0<x<1\Big\},$$

com a orientação induzida por uma parametrização à sua escolha, e

$$F(x,y,z) = (z, -xy, -xz).$$

(b) $C$ é a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t)\big) \quad , \quad t\in[0,2\pi]$$

e $F$ o campo vectorial dado por

$$F(x,y,z) \;=\; \big(x^2-y, y^2-x, y^2-x^2+z^3\big).$$

5. Considere a superfície

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; y=x^2+z^2 \;;\; 1<y<4\Big\},$$

orientada com a normal $\nu$ cuja segunda componente é positiva.

(a) Sabendo que $S$ tem densidade superficial de massa dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1+4(x^2+z^2)}$ calcule a massa total de $S$.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (2x, -y, -z)$$

através de $S$ no sentido da normal $\nu$.

6. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

(a) $F(x,y,z) = (yz, -xz, xy-2)$

(b) $F(x,y,z) = (y\operatorname{sen} z, y\operatorname{sen} z, \cos z)$

7. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x^2 + z^2 \ , \ 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária $\overrightarrow{n} = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_y < 0$.

   (a) Calcule a área de $S$.

   (b) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de $S$ no sentido de $\overrightarrow{n}$, utilizando o teorema da divergência.

   (c) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de $S$ no sentido de $\overrightarrow{n}$, utilizando o teorema de Stokes.

8. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - x^2 - y^2 \ ; x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0\}.$$

   (a) Parametrize a superfície $S$.

   (b) Calcule a área de $S$.

   (c) Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ e calcule o trabalho

$$W = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

   no sentido horário quando visto do ponto $(10, 10, 10)$, usando o teorema de Stokes.

   (d) Determine o fluxo de $G(x, y, z) = (x, -y^4 - y, 4y^3 z + 2)$ através de $S$ no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o teorema da divergência.

9. Sejam $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ o vector posição do ponto $P$ e $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Mostre que o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{r}$$

através de uma superfície simples, fechada, regular que não contenha a origem é igual a zero. Qual seria o fluxo do campo $F$ se a superfície contivesse a origem no seu interior?

# 2 Soluções

1. $-\pi$

2. (a) $0$

   (b) $-2\pi$

   (c) $-\frac{5}{6}$

3. (a) $-2\pi$

(b) $9\pi$

(c) $\frac{3}{2}$

4. (a) $0$

   (b) $0$

5. (a) $33\pi$

   (b) $-15\pi$

6. (a) $\left(2y - \frac{x}{2}(y^2+z^2), 0, \frac{y^2 z}{2}\right)$ (por exemplo)

   (b) $(0, (x+y)\cos z, -xy \operatorname{sen} z)$ (por exemplo)

7. (a) $\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$

   (b) $-63\pi$

   (c) $-63\pi$

8. (a) $g(u,v) = (u, v, 1-u^2-v^2)$, definida em $U = \{(u,v) : u^2+v^2 < 1 \wedge u > 0 \wedge v > 0\}$

   (b) $\frac{\pi}{24}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

   (c) $-\frac{\pi}{2}$

   (d) $\frac{\pi}{2}$

9. $4\pi$