TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

Curso: LEQ, LEAmb, LEIC-A, LEBiol, LEBiom, LEMat, LENO

Ficha de Problemas Resolvidos nº 8

Fluxo e Teorema da Divergência

1 Exercícios Resolvidos

1. Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

através da superfície S definida por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq 0$ orientada pela normal com terceira componente positiva.

Resolução:

Trata-se de uma porção do parabolóide de equação $z = 1 - x^2 - y^2$ de vértice $(0, 0, 1)$ situada acima do plano $z = 0$. Assim, podemos considerar para esta superfície a parametrização

$$g(u, v) = \big(u, v, 1 - u^2 - v^2\big)$$

com $(u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, dado que a intersecção de $z = 1 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, -2u) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

Como tal, a expressão geral do vector normal a S necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Atendendo à orientação dada, devemos usar este vector $\overrightarrow{N}$ e não o seu simétrico $-\overrightarrow{N} = (-2u, -2v, -1)$. O fluxo do campo de F através de S é então dado por

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iint_D \big(u, v, 1 - u^2 - v^2\big) \cdot (2u, 2v, 1) \, du \, dv = \iint_D \big(u^2 + v^2 + 1\big) \, du \, dv.$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, usamos coordenadas polares, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ para o cálculo do integral duplo (note que o jacobiano desta transformação de coordenadas é ρ) de onde resulta que:

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^2+1\right)\rho \, d\rho \, d\theta \;=\; \frac{3\pi}{2}$$

2. Mostre que 36π é o valor do fluxo do campo vectorial

$$F(x,y,z) = (0,0,z)$$

através da superfície esférica S definida por $x^2+y^2+z^2 = 9$ orientada segundo a normal exterior a S.

Resolução:

Atendendo às coordenadas esféricas, a superfície S pode ser parametrizada por

$$g(\theta,\phi) = (3\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 3\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 3\cos\phi)$$

para $\theta \in \,]0,2\pi[$ e $\phi \in \,]0,\pi[$. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial\theta} = (-3\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 3\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 0) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial\phi} = (3\cos\phi\cos\theta, 3\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -3\operatorname{sen}\phi)$$

Como tal, a expressão do vector normal necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N} &= \frac{\partial g}{\partial\theta} \times \frac{\partial g}{\partial\phi} \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & 3\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \\ 3\cos\phi\cos\theta & 3\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -3\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} \\
&= \left(-9\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, -9\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -9\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right)
\end{aligned}$$

Atendendo à orientação dada, há que considerar o vector normal

$$-\overrightarrow{N} = \left(9\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, 9\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, 9\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right)$$

que "aponta para cima"no hemisfério norte (onde $\phi \in \,]0,\pi/2[$) e aponta "para baixo"no hemisfério sul (onde $\phi \in \,]\pi/2,\pi[$. O fluxo do campo F ao longo da superfície S é dado pelo integral de superfície

$$\begin{aligned}
\iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iint_D \big(0,0,z(\theta,\phi)\big) \cdot \big(-\overrightarrow{N}(\theta,\phi)\big)\, d\theta\, d\phi \\
&= \iint_D (3\cos\phi)\ (9\cos\phi \operatorname{sen}\phi)\, d\theta\, d\phi \\
&= 27 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \cos^2\phi \, d\phi\, d\theta \\
&= 27 \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{-\cos^3\phi}{3} \right|_0^{\pi} \;=\; 27 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \\
&= 36\pi.
\end{aligned}$$

3. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = (x^2, xy, z)$ e V é o sólido limitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$. Calcule o fluxo de F através da fronteira de V no sentido da normal exterior a V usando:

   (a) A definição de fluxo.

   (b) O teorema da divergência.

   Resolução:

   (a) A fronteira de V é $S = S_1 \cup S_2$ em que S_1 é o parabolóide, $z = 4 - x^2 - y^2$, com $z > 0$, e S_2 é o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ no plano $z = 0$. Assim, o fluxo de F através de S é dado por:

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS = \iint_{S_1} F \cdot \overrightarrow{\nu}_1\, dS + \iint_{S_2} F \cdot \overrightarrow{\nu}_2\, dS$$

   É fácil de entender que $\overrightarrow{\nu}_2 = (0,0,-1)$ pelo que $F \cdot \overrightarrow{\nu}_2 = z$ e dado que em S_2 se tem $z = 0$ obtemos

$$\iint_{S_2} F \cdot \overrightarrow{\nu}_2\, dS = 0$$

   Por outro lado, S_1 pode ser parametrizada por

$$g(u,v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2) \quad , \quad (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 4\}.$$

   A normal a S_1 é

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1),$$

e dado que a normal exterior a S_1 tem terceira componente positiva, usaremos $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ para o cálculo do integral. Então

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} F \cdot \overrightarrow{\nu}_1 dS &= \iint_D (u^2, uv, 4-u^2-v^2) \cdot (2u, 2v, 1) du\, dv \\ &= \iint_D (2u^3 + 2uv^2 + 4 - u^2 - v^2) du\, dv\end{aligned}$$

Fazendo a transformação para coordenadas polares ($u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$) obtém-se

$$\iint_{S_1} F \cdot \overrightarrow{\nu}_1 dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^3\cos^3\theta + 2r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + 4 - r^2\right) r d\theta\, dr = 8\pi$$

e, como tal, o fluxo pedido é 8π.

Para o cálculo expedito do integral anterior, note que se f é uma função periódica de média zero então

$$\int_a^b f(t)\, dt = 0$$

sendo $b-a$ o período de f. Como exemplos:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt = 0.$$

(b) Pelo teorema da divergência

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{\nu} dS = \iiint_V \operatorname{div} F dV$$

em que V é o sólido dado, S a sua fronteira e $\overrightarrow{\nu}$ a normal unitária exterior a S. Dado que

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < 4 - x^2 - y^2\right\}$$

e que $\operatorname{div} F = 3x+1$, tem-se que

$$\iiint_V (3x+1)\, dV = \iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} (3x+1)\, dz\, dx\, dy = \iint_D (3x+1)(4-x^2-y^2)\, dA$$

sendo $D = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 \leq 4\}$. Mudando para coordenadas polares, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, temos que

$$\iiint_V (3x+1) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (3\rho\cos\theta + 1)(4-\rho^2)\rho\, d\theta\, d\rho = 8\pi.$$

4. Use o Teorema da divergência para calcular o valor de

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

em que $F(x, y, z) = (\operatorname{sen}(\pi x), zy^3, z^2 + 4x)$ e S é a superfície do paralelipípedo $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ e $1 \leq z \leq 4$.

Resolução:

Vamos usar o Teorema da divergência na seguinte forma:

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_E \operatorname{div} F dV$$

sendo E o paralelipípedo limitado pelos planos $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$ e $z = 4$. Temos então que os limites de integração serão

$$-1 \leq x \leq 2 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad , \quad 1 \leq z \leq 4.$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen}(\pi x)) + \frac{\partial}{\partial y}(zy^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 4x) = \pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z$$

Basta-nos agora calcular o integral

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\ &= \int_{-1}^{2} \int_{0}^{1} \int_{1}^{4} (\pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z) dz \, dy \, dx \\ &= \frac{135}{2} \end{aligned}$$

5. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S (2x + 2y + z^2) \, dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução:

A superfície S em questão é a esfera unitária, que é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e tem um vector normal num ponto (x, y, z) da forma (x, y, z) (o qual aponta para "fora"). Observe que a função integranda é

$$2x + 2y + z^2 = (2, 2, z) \cdot (x, y, z) = (2, 2, z) \cdot \nu,$$

pois a normal unitária em cada ponto de ∂B é

$$\nu = \frac{\nabla(x^2+y^2+z^2-1)}{\|\nabla(x^2+y^2+z^2-1)\|} = \frac{1}{2}\big(2x, 2y, 2z\big) = (x, y, z).$$

Desta forma o integral que se pretende calcular é de facto o fluxo do campo $(2, 2, z)$ através de ∂B. Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned}
\iint_S (2x+2y+z^2)\,dS &= \iint_S (2,2,z)\cdot(x,y,z)\,dS \\
&= \iiint_B \operatorname{div} F\,dV \\
&= \iiint_B dV = \mathsf{Vol}_3(B) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

6. Use o teorema da divergência para determinar o fluxo do campo $F(x, y, z)$ através da superfície S na direcção da normal ν indicada, sendo:

   (a) S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e os planos $x+2z = 4$ e $y = 2$,

   $$F(x, y, z) = (xyz, yz, z^2)$$

   e ν com terceira componente positiva

   (b) S é o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $0 < z < 1$, ν com terceira componente não positiva e

   $$F(x, y, z) = (x^2y, -xy^2, 1)$$

Resolução:

(a) Pretendemos calcular

$$\iint_S F\cdot\nu\,dS$$

em que S é a superfície dada. Dado que S delimita um sólido, V, por aplicação do teorema da divergência tem-se que

$$\iint_S F\cdot\nu\,dS = \iiint_V \operatorname{div} F\,dV$$

sendo

$$\operatorname{div}\, F = (3+y)z$$

e

$$V = \Big\{(x,y,z)\ .\ 0 < y < 2\ ,\ 0 < z < 2\ ,\ 0 < x < 4 - 2z\Big\}$$

Então

$$\iiint_V \text{div } F\, dV = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^{4-2z} (3+y)z\, dx\, dy\, dz = \frac{64}{3}$$

(b) Queremos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu\, dS$$

Observe que S não é uma superfície fechada (isto é, S não é a fronteira de um sólido V). Para que possamos utilizar o teorema da divergência, vamos considerar a superfície S_1 constituída pelo círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ em $z = 1$. Seja agora $\Sigma = S \cup S_1$ (ou seja o parabolóide "tapado" com o círculo). Como Σ é uma superfície fechada, podemos agora usar o teorema da divergência escolhendo a normal exterior, ν, em Σ (ou seja, que aponte "para fora"). Seja ν_1 a normal a S_1 (que aponta para cima). Temos

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu\, dS = \iint_S F \cdot \nu\, dS + \iint_{S_1} F \cdot \nu_1\, dS$$

pelo que,

$$\iint_S F \cdot \nu\, dS = \iint_\Sigma F \cdot \nu\, dS - \iint_{S_1} F \cdot \nu_1\, dS$$

Pelo teorema da divergência,

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu\, dS = \iiint_E (2xy - 2xy + 0) dV = 0$$

em que E é o sólido que possui Σ como fronteira. Como consequência

$$\iint_S F \cdot \nu\, dS = -\iint_{S_1} F \cdot \nu_1\, dS$$

Para determinar $\iint_{S_1} F \cdot \nu_1\, dS$, basta notar que a normal unitária exterior ao sólido nos pontos de S_1 é $\nu_1 = (0,0,1)$, pelo que $F \cdot \nu = F_3 = 1$. Então, com $D = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2\ :\ u^2 + v^2 \leq 1\Big\}$, obtemos

$$\iint_{S_1} F \cdot \nu_1\, dS = \iint_D dA = Vol_2(D) = \pi$$

donde concluímos que

$$\iint_S F \cdot \nu\, dS = -\pi$$

7. Seja S a parte do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$, com $z > 1$. Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,(x,y,z)$$

através de S na direção da normal a S com terceira componente positiva. Note que F é da forma fG, onde f é um campo escalar e G um campo vectorial.

Resolução:

Vamos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

usando o teorema da divergência. Mais uma vez se constata que S não é uma superfície fechada e, assim, para que se possa usar o teorema é necessário "tapar" inferiormente S. Considere-se

$$\Sigma = S \cup T$$

em que T é a superfície $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1 \ , \ z = 1\}$. Então Σ é uma superfície fechada, sendo V o sólido limitado por Σ e ν a normal exterior a Σ, tem-se que

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

Dado que

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu \, dS = \iint_S F \cdot \nu \, dS + \iint_T F \cdot \nu \, dS$$

obtém-se

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot \nu \, dS + \iint_T F \cdot \nu \, dS$$

e, como tal, o integral pedido é

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV - \iint_T F \cdot \nu \, dS$$

Vamos calcular estes dois integrais. Por um lado, fazendo $r = ||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, temos $F = \frac{1}{r^3}(x,y,z)$ e

$$\operatorname{div} F = 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2+y^2+z^2) = 0$$

e assim

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = 0$$

Por outro lado, em T tem-se $\nu = (0,0,-1)$ e assim $F \cdot \nu = -r^{-3}z$. Podemos parametrizar T por $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, 1)$, com $0 < \rho < 1$ e $0 < \theta < 2\pi$. Então

$$\iint_T F \cdot \nu \, dS = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^2+1)^{-3/2} \rho \, d\theta \, d\rho = \pi\left(\sqrt{2} - 2\right)$$

e finalmente

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \pi \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

8. Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e considere o campo vectorial $G(x, y, z) = \phi(r)(x, y, z)$, onde $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, determine ϕ sem calcular div G directamente.

Resolução:

Estando G definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, consideremos o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

Note-se que a fronteira de V é constituída por duas superfícies esféricas de raios 1 e R, respectivamente. As respectivas normais unitárias e exteriores a V são os vectores $-(x, y, z)$ e $\frac{1}{R}(x, y, z)$. Aplicando o teorema de Gauss em V obtém-se

$$\iiint_V \operatorname{div} G \, dV = \iint_\Sigma G \cdot \nu \, dS$$

em que Σ é constituida pela esfera de raio 1, S_1 e pela esfera de raio R, S_R. Dado que $\operatorname{div} G = 0$

$$\iint_\Sigma G \cdot \nu \, dS = 0$$

ou seja

$$\iint_{S_1} G \cdot \nu \, dS + \iint_{S_R} G \cdot \nu \, dS = 0$$

Fazemos o cálculo do segundo integral, dado que para o primeiro basta fazer $R = 1$, no resultado que vamos obter (e trocar o sinal, dado que a normal a S_1 aponta em sentido contrário à de S_R). Sendo $S_R = \{(x, y, z) \ : \ ||(x, y, z)|| = R^2\}$, tem-se que

$$G(x, y, z) = \phi(R)(x, y, z)$$

e assim

$$\begin{aligned}
\iint_{S_R} G \cdot \nu \, dS &= \iint_{S_R} \phi(R)(x, y, z) \cdot \frac{1}{R}(x, y, z) \, dS \\
&= \frac{\phi(R)}{R} \iint_{S_R} ||(x, y, z)||^2 ds \\
&= R \, \phi(R) \operatorname{Vol}_2 (S_R) \\
&= 4\pi\phi(R)R^3
\end{aligned}$$

Fazendo $R = 1$ e trocando o sinal, obtemos

$$\iint_{S_1} G \cdot \nu \, dS = -4\pi\phi(1)$$

Sabendo que $\phi(1) = 1$, tem-se

$$-4\pi + 4\pi\phi(R)R^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(R) = \frac{1}{R^3}$$

9. Seja f um campo escalar de classe C^1 e g um campo escalar de classe C^2 ambos definidos num conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$. Demonstre a seguinte igualdade, (designada *primeira fórmula de Green*), onde E é um sólido simples cujo fecho está contido em A e S a sua fronteira:

$$\iint_S f \, \nabla g \cdot \nu \, dS = \iiint_E (f \, \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV$$

Resolução:

Note que, por aplicação do teorema da divergência

$$\iint_S (f\nabla g) \cdot \nu \, dS = \iiint_E \operatorname{div}(f\nabla g) dV$$

Como

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\nabla g) &= \operatorname{div}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\
&= \nabla f \cdot \nabla g + f \, \Delta g
\end{aligned}$$

o resultado fica, assim, demonstrado.