TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III
$1^{\underline{o}}$ Semestre 2023/2024
Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 8
Fluxo e Teorema da Divergência

1 Exercícios Propostos

1. Calcule o fluxo do campo vectorial F através da superfície S orientada da forma indicada, sendo:

   (a) Considere o campo vectorial

   $$F(x, y, z) = (0, xz, 3xzy^2)$$

   e a superfície

   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -x^2 + y^3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1\}$$

   orientada com a normal unitária cuja terceira componente é positiva.

   (b) $F(x, y, z) = (yz, xz, 2xy)$ e S o cone definido por

   $$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad 0 < z < 1$$

   orientado com a normal n com terceira componente positiva.

   (c) $F(x, y, z) = h(r)(x, y, z)$, em que $r = x^2 + y^2 + z^2$ e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua, e S a superfície esférica de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

2. Calcule o fluxo do campo vectorial F através da fronteira da região E segundo a normal exterior utilizando a definição de fluxo e o teorema da divergência, sendo:

   (a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

   (b) $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ e E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

3. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot \nu \, dS$ onde

   (a) $F(x, y, z) = (0, 0, x + y + z^2)$, S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$ e ν é a normal unitária que aponta para fora o cilindro.

(b) $F(x, y, z) = (y^3 e^z, -xy, x \operatorname{arctg} y)$ e S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

(c) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S, onde $F(x, y, z) = (x^3 y, -x^2 y^2, -x^2 yz)$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$.

(d) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S, onde $F(x, y, z) = (3x, xz, z^2)$ e S é a superfície da região delimitada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano-xy.

(e) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através de S, onde $F(x, y, z) = (x^4, -x^3 z^2, 4xy^2 z)$ e S é a superfície do sólido constituído pela parte do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ limitada pelos planos $z = x + 2$ e $z = 0$.

4. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$ onde

$$F(x, y, z) \;=\; \Big(z^2 x,\ \frac{1}{3} y^3 + \operatorname{tg} z,\ x^2 z + y^2\Big),$$

S é o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e n é a normal unitária a S orientada para cima.

Nota: S não é uma superfície fechada.

5. Seja $F = (z \operatorname{arctg} y^2, z^3 \ln(x^2 + 1), z)$. Determine o fluxo de F através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para cima.

Nota: S não é uma superfície fechada.

6. Calcule o volume do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z < 1\}$$

usando o teorema da divergência.

7. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e e o campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Mostre que

$$\text{Volume}\, E = \frac{1}{3} \iint_s F \cdot \overrightarrow{\nu} dS$$

sendo $\overrightarrow{\nu}$ a normal unitária exterior a S.

8. Demonstre a identidade abaixo, supondo que S e E satisfaçam as condições do teorema da divergência e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

$$\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot n dS = \iiint_E (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV$$

Sugestão: Use o teorema da divergência e o facto de $\nabla f \cdot \nabla g = \nabla g \cdot \nabla f$.

9. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e f uma função escalar de classe C^2, mostre que

$$\iint_S D_{\overrightarrow{N}} f \, dS = \iiint_E \Delta f \, dV$$

onde $D_{\overrightarrow{N}} f$ é a derivada de f na direção da normal a S, $\overrightarrow{N}$ e $\Delta f = \nabla^2 f$ é a laplaciano de f.

2 Soluções

1. **(a)** 0

   (b) 0

   (c) $4\pi h(1)$

2. **(a)** 4π **(b)** $\pi/2$

3. **(a)** 36π **(b)** $-\frac{1}{24}$ **(c)** 0 **(d)** $\frac{136}{3}\pi$ **(e)** $\frac{2\pi}{3}$

4. $\frac{13}{20}\pi$

5. $3\pi/2$

6. $\pi/2$