

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 7

Integrais de Superfície e Operadores Diferenciais

1 Exercícios Resolvidos

1. Calcule o integral de superfície de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4}$, sendo S a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xOy .

Resolução:

Começemos por parametrizar a superfície. Dado que a interseção do parabolóide com o plano $z = 0$ é $x^2 + y^2 = 9$, consideraremos a parametrização

$$g(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

em que $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$. Sendo assim

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_T f(x, y) \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \|(2x, 2y, 1)\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dx dy \\ &= \iint_T 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} dx dy \\ &= 2 \iint_T (x^2 + y^2 + \frac{1}{4}) dx dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares neste último integral em $T \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

em que $0 < \rho < 3$ e $0 < \theta < 2\pi$,

$$\iint_S f \, dS = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left(\rho^2 + \frac{1}{4}\right) \rho \, d\rho \, d\theta = 4\pi \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{8}\right) \Big|_0^3 = \frac{171}{2}\pi$$

2. Determine a área da superfície dada por

(a) A parte inferior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) A superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\}$.

(c) A fronteira do sólido limitado pelas superfícies $z = 1$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ e $z = x^2 + y^2$.

Resolução:

(a) Sejam

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

Note-se que na esfera $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$. A intersecção da esfera com o cone é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 + z^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1,$$

pois $z \geq 0$. Logo, se $z < 1$,

$$1 > \sqrt{2} \cos \phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi > \pi/4.$$

Para a parte da esfera que está abaixo do cone, temos pois que $\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$. Assim sendo,

$$g(\phi, \theta) = (\sqrt{2} \sin \phi \cos \theta, \sqrt{2} \sin \phi \sin \theta, \sqrt{2} \cos \phi)$$

com $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desta forma

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = (\sqrt{2} \cos \phi \cos \theta, \sqrt{2} \cos \phi \sin \theta, -\sqrt{2} \sin \phi)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-\sqrt{2} \sin \phi \sin \theta, \sqrt{2} \sin \phi \cos \theta, 0)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \phi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{2} \cos \phi \cos \theta & \sqrt{2} \cos \phi \sin \theta & -\sqrt{2} \sin \phi \\ -\sqrt{2} \sin \phi \sin \theta & \sqrt{2} \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2 \sin^2 \phi \cos \theta, 2 \sin^2 \phi \sin \theta, 2 \sin \phi \cos \phi) \end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \phi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + 4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = 2 |\sin \phi| = 2 \sin \phi$$

(pois $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$). Assim,

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial \phi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2 \sin \phi d\phi d\theta = 2\pi(2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

(b) A superfície S é uma porção do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$. Uma parametrização de S é (ver exercício 5(c)), é

$$g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

com $D = \{u^2 + v^2 < 1\}$, e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$

A área de superfície pedida é

$$Vol_2(S) = \iint_S \|(-2u, -2v, 1)\| dS = \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} du dv$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, podemos usar coordenadas polares ($x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$) pelo que

$$Vol_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}$$

(c) O sólido é a parte interior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ e exterior à superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ compreendida entre os planos horizontais $z = 1$ e $z = 4$. O seu topo, que designamos por S_T , é a coroa circular

$$1 < x^2 + y^2 < 4 \quad \text{contida no plano } z = 4;$$

a superfície (lateral) interior, S_1 , é a face do cilindro dada por $x^2 + y^2 = 1$ e a superfície (lateral) exterior, S_2 , é o parabolóide $z = x^2 + y^2$, ambas entre os planos $z = 1$ e $z = 3$. Intersectando tanto o parabolóide como o cilindro com o plano $z = 1$ obtém-se a mesma curva: $x^2 + y^2 = 1, z = 1$. Assim, a base do sólido é uma curva que, como tal, não contribui para o valor da área. Assim sendo, e executando desde já o cálculo (elementar!) das áreas de S_T e S_1 :

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= Vol_2(S_T) + Vol_2(S_1) + Vol_2(S_2) \\ &= (\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2) + (2\pi \cdot 1) \cdot 3 + Vol_2(S_2) \\ &= 9\pi + Vol_2(S_2) \end{aligned}$$

Quanto à área de S_2 sabemos que

$$Vol_2(S_2) = \iint_{S_2} dS$$

Para calcular o integral, vamos começar por parametrizar a superfície. Em coordenadas cartesianas

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

onde $g : T \rightarrow S_2$, com $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$. Assim:

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \iint_T \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares,

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4r^2 + 1)^{1/2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \frac{2}{3 \cdot 8} (4r^2 + 1)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}) \end{aligned}$$

Finalmente

$$Vol_2(S) = 9\pi + \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2})$$

3. Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. Mostre que a área da superfície $z = f(x, y)$, para $(x, y) \in K$, é dada

pela fórmula

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Aproveite o resultado para determinar a área da porção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução:

Uma parametrização da superfície, que designamos por S , é $g : K \rightarrow S$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

A área de S é, pois, dada por

$$A = \iint_S dS = \iint_K \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| dudv$$

Temos assim que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Desta forma

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

que é a fórmula pretendida.

Vamos aplicar esta fórmula ao cálculo pedido. Temos que

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

com $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Então:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2} dx dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

pelo que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $1 \leq r \leq 2$. Então

$$A = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1+4r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+4r^2} r dr$$

Fazendo a mudança de variável $u = 1+4r^2$ (o que implica $5 \leq u \leq 17$ e $\frac{du}{dr} = 8r$). Então

$$A = \frac{2\pi}{8} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}} u^{1/2} du = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2})$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 ; 1 < y < 4\}.$$

Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1+4(x^2+z^2)}$ calcule a massa total de S .

Resolução:

A massa de S é dada pelo integral

$$M(S) = \int_S \alpha dS.$$

Considerando a parametrização

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho^2, \rho \sin \theta) \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \quad , \quad 1 < \rho < 2$$

tem-se então que

$$M(S) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \alpha(g(\rho, \theta)) \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_1^2 (1+4\rho^2) \rho d\rho = 33\pi.$$

5. Seja f um campo escalar de classe C^2 e F um campo vectorial também de classe C^2 . Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique porquê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vectorial ou escalar.

- (a) $\text{div}(\nabla f)$
- (b) $\text{rot}(\text{rot } F)$
- (c) $\nabla f \times (\text{div } F)$

Resolução:

(a) Sendo f um campo escalar de classe C^2 , o gradiente de f está bem definido

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

e representa um campo vectorial de classe C^1 . Sendo assim $\text{div}(\text{grad } f)$ está bem definido

$$\text{div}(\text{grad } f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

e é um campo escalar que, com vimos acima, é igual ao laplaciano de f .

(b) Sendo F um campo vectorial de classe C^2 , $\text{rot } F$ está bem definido

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

e representa um campo vectorial. Sendo assim $\text{rot}(\text{rot } F)$ está bem definido e é também um campo vectorial.

(c) Sendo f um campo escalar de classe C^2 , o gradiente de f está bem definido e representa um campo vectorial. Por outro lado, sendo F um campo vectorial $\text{div } F$ está bem definido e representa um campo escalar. Atendendo a que o produto externo é uma operação definida entre dois vectores, $\text{grad } f \times \text{div } F$ não está definido.

6. Determine o rotacional e a divergência do campo vectorial definido por

(a) $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z)$

(b) $F(x, y, z) = (xyz, 0, -x^2y)$

Resolução:

(a) Seja $r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Então

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

Identicamente,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Desta forma, e como $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, tem-se que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = \left(-\frac{z}{r^2} \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} \frac{z}{r}, \frac{z}{r^2} \frac{x}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{z}{r}, -\frac{y}{r^2} \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \frac{y}{r} \right) = (0, 0, 0)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \\ &= \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2} \\ &= \frac{3r - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

(b) Tem-se que

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 0 & -x^2y \end{vmatrix} = (-x^2, 3xy, -xz)$$

e

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y) = yz$$

7. Demonstre as identidades, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e F, G foram campos vectoriais, então $fF, F \cdot G$ e $F \times G$ são definidos como usual.

- (a) $\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$.
- (b) $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$
- (c) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$
- (d) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Resolução:

Suponhamos que $F = (P_1, Q_1, R_1)$ e $G = (P_2, Q_2, R_2)$.

(a) Temos que $F + G = (P_1 + P_2, Q_1 + Q_2, R_1 + R_2)$. Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(F + G) &= \frac{\partial(P_1 + P_2)}{\partial x} + \frac{\partial(Q_1 + Q_2)}{\partial y} + \frac{\partial(R_1 + R_2)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \\ &= \operatorname{div} F + \operatorname{div} G\end{aligned}$$

(b) Supondo $F = (P, Q, R)$ temos $fF = (fP, fQ, fR)$. Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fF) &= \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} + \frac{\partial(fR)}{\partial z} \\ &= f \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} P + f \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} Q + f \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} R \\ &= f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f\end{aligned}$$

(c) Temos que

$$F \times G = (Q_1 R_2 - Q_2 R_1, P_2 R_1 - P_1 R_2, P_1 Q_2 - Q_1 R_2)$$

Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(F \times G) &= \frac{\partial(Q_1 R_2 - Q_2 R_1)}{\partial x} + \frac{\partial(P_2 R_1 - P_1 R_2)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1 Q_2 - P_2 Q_1)}{\partial z} \\ &= Q_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} + R_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x} - Q_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} - R_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} + R_1 \frac{\partial P_2}{\partial y} + P_2 \frac{\partial R_1}{\partial y} \\ &\quad - R_2 \frac{\partial P_1}{\partial y} - P_1 \frac{\partial R_2}{\partial y} + P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial z} + Q_2 \frac{\partial P_1}{\partial z} - P_2 \frac{\partial Q_1}{\partial z} - Q_1 \frac{\partial P_2}{\partial z} \\ &= P_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) + R_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right) \\ &\quad + P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \\ &= -F \cdot \operatorname{rot} G + G \cdot \operatorname{rot} F\end{aligned}$$

(d) Da alínea anterior, temos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot \operatorname{rot}(\nabla f) - \nabla f \cdot \operatorname{rot}(\nabla g)$$

Se f é uma função de classe C^2 em \mathbb{R}^3 então $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$. Deste resultado, obtemos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot 0 - \nabla f \cdot 0 = 0$$

8. Verifique as seguintes igualdades:

(a) $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

(b) $\operatorname{div}(r\mathbf{r}) = 4r$. sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

Resolução:

(a) Sendo $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned}$$

(b) Tem-se que (utilizando os cálculos das derivadas parciais de r do problema 2(a)):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(r\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(xr) + \frac{\partial}{\partial y}(yr) + \frac{\partial}{\partial z}(zr) \\ &= r + x \frac{x}{r} + r + y \frac{y}{r} + r + z \frac{z}{r} \\ &= 3r + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = 4r \end{aligned}$$

9. Mostre que $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ satisfaz a equação de Laplace $\Delta f = 0$, excepto no ponto $(0, 0)$.

Resolução:

Para mostrar que f verifica a equação de Lapalace, há que verificar

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Desta forma, $\Delta f = 0$.

10. Mostre que qualquer campo vectorial da forma

$$F(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z)),$$

em que f , g e h são continuamente diferenciáveis em \mathbb{R} , é irrotacional.

Resolução:

Basta mostrar que $\text{rot } F = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x) & g(y) & h(z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} h(z) - \frac{\partial}{\partial z} g(y), \frac{\partial}{\partial z} f(x) - \frac{\partial}{\partial x} h(z), \frac{\partial}{\partial x} g(y) - \frac{\partial}{\partial y} f(x) \right) \\ &= (0, 0, 0), \end{aligned}$$

como se queria mostrar.

11. Existe um campo vectorial G em \mathbb{R}^3 tal que $\text{rot } G = (x \sin y, \cos y, z - xy)$? Justifique.

Resolução:

Vamos supor que existe efectivamente um campo vectorial G tal que $\text{rot } G = F(x, y, z) = (x \sin y, \cos y, z - xy)$. Começemos por calcular $\text{div } F$. Temos que

$$\text{div } F = \frac{\partial}{\partial x} (x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y} (\cos y) + \frac{\partial}{\partial z} (z - xy) = \sin y - \sin y + 1 = 1$$

Sabemos que se G é um campo vectorial de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , então $\operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0$. Mas como

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div}(\operatorname{rot} G) \neq 0,$$

concluimos (por redução ao absurdo) que não pode existir G tal que $F = \operatorname{rot} G$ em \mathbb{R}^3 .

12. Mostre que qualquer campo vectorial de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , da forma

$$F(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$$

é incompressível.

Resolução:

Basta mostrar que $\operatorname{div} F = 0$ para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f(y, z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x, y)}{\partial z} = 0,$$

como se queria mostrar.