

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/2027

Cursos: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Propostos nº 5

Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem e Separáveis

1. Diga qual das seguintes equações é uma equação linear

(a) $x - y' = xy$ (b) $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

(a) $\frac{dy}{dt} = -ye^t$ (b) $y' = x^3 - 2xy$ (c) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$
(d) $t\frac{dy}{dt} + 2y = e^t, \quad t > 0$ (e) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{3x} \sin x$ (f) $\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t \cos t$

3. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

(a) $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 1$ (b) $\frac{dy}{dt} + y = \sin t, \quad y(\pi) = 1$
(c) $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$ (d) $\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t \cos t, \quad y(\pi) = 0$
(e) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases}$ tomando-se $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

4. No instante $t = 0$ a quantidade de um certo material radioativo armazenado é x_0 . A equação para $x(t)$, a quantidade de material radioativo é $\frac{dx}{dt} = -ax$, onde $a > 0$ é uma constante.

- (a) Encontre a solução $x(t)$
(b) Calcule a *meia-vida*, ou seja o tempo necessário para que a concentração inicial x_0 se reduza a metade. Note que a “meia-vida” não depende da concentração inicial.

5. Considere a equação diferencial

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

- (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.
- (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.
- (c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções contínuas e n é número real diferente de 0 e de 1. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $y' + \frac{y}{x} = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 1$

(b) $y' = 5y - \frac{4x}{y}, \quad y(0) = -\frac{1}{5}$

7. Considere a equação de Riccati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \quad (1)$$

- (a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Riccati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.
- (b) Determine a solução da equação (1).

8. (a) Mostre que a substituição $z = 1/P$ transforma a equação logística

$$P' = kP \left(1 - \frac{P}{M} \right)$$

na equação linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

- (b) Resolva a equação diferencial para obter uma expressão para $P(t)$,

9. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

(a) $y' = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2x - 4}{2y - 2}$

(c) $x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - 4v^2}{3v}$

(d) $y' = y \log(y)$

10. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\frac{dy}{dx} = y(3 - x), \quad y(0) = 5$

(b) $\frac{dy}{dt} = 1 + t^2 + y^2 + t^2 y^2, \quad y(0) = 1$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\log y}, \quad y(\pi) = e$

11. Considere a equação diferencial separável $x e^y \sin x - y y' = 0$. Determine a solução (na forma implícita) desta equação que satisfaz a condição inicial $y(\frac{\pi}{2}) = -1$.

12. Resolva a equação diferencial

$$y' = (8x + 2y + 1)^2$$

efectuando a mudança de variável $v = 8x + 2y + 1$.

13. Considere uma população num ecossistema, $P(t)$, cujo crescimento é proporcional a $P(t)$ e à quantidade de recursos disponíveis. A quantidade de recursos disponíveis é proporcional a $\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$, onde M é a *capacidade de carga* (a população máxima que os recursos do ecossistema conseguem suportar). A função $P(t)$ evolui de acordo com a *equação logística*:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Admitindo que $P(0) = P_0 \geq 0$.

- a) Sendo $x(t) = \frac{P(t)}{M}$ e $x_0 = \frac{P_0}{M}$, escreva o problema de valor inicial satisfeito por $x(t)$ e resolva-o.
- b) Determine $P(t)$ para qualquer $t \geq 0$, e calcule o $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$. Esboce os gráficos das soluções obtidas nos casos $P_0 = 0$, $0 < P_0 < M$, $P_0 = M$ e $P_0 > M$.

1 Soluções de 1.2

1. (a) sim; (b) não
2. **(a)** $y(t) = ce^{-e^t}$ **(b)** $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$ **(c)** $y(x) = 2x + ce^{-x}$
(d) $y(t) = \frac{e^t(t-1)+c}{t^2}$ **(e)** $y(x) = e^{3x}(c - \cos x)$ **(f)** $y(t) = (t^2 + ct) \cos t$
 com $c \in \mathbb{R}$, em todas as alíneas.
3. **(a)** $y(x) = 1$ **(b)** $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{\pi-t})$ **(c)** $y(t) = \frac{\sin t}{t^2}$
(d) $y(t) = (t^2 - \pi t) \cos t$
(e) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$
4. **(a)** $x(t) = x_0e^{-at}$ **(b)** $T = \frac{\log 2}{a}$.
5. **(a)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ ou $y(t) = -\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ **(b)** $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ e $I_{\text{Max}} =]0, \infty[$
6. **(a)** $y(x) = \left(\frac{x^2}{5} + \frac{4}{5\sqrt{x}}\right)^2$ **(b)** $y(x) = -\frac{\sqrt{20x+2-e^{10x}}}{5}$
7. **(a)** $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2$ é equivalente à equação $\frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{2}{t} + 1\right)\psi = -\psi^2$
(b) $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}}{t^2\left(\int \frac{e^{-t}}{t^2} dt + C\right)}$
- 8.
9. **(a)** $ye^{y^2} = Ke^{\sin x}$, $K \in \mathbb{R}$
(b) $y(x) = 1 + \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + C}$ ou $y(x) = 1 - \sqrt{x^3 + x^2 - 4x + C}$, $C \in \mathbb{R}$
(c) $4v^2 - 1 = \frac{C}{\sqrt[3]{x^8}}$, $C \in \mathbb{R}$
(d) $y(t) = e^{Ke^t}$, $K \in \mathbb{R}$
10. **(a)** $y(x) = 5e^{3x-\frac{x^2}{2}}$ **(b)** $y(t) = \text{tg}\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $y(1 - \log y) = 1 + \cos x$
11. $(1 + y)e^{-y} = x \cos x - \sin x + 1$
12. $8x + 2y + 1 = 2 \text{tg}(4x + c)$, com $c \in \mathbb{R}$
13. **(a)** $x' = kx(1 - x)$, $x(0) = x_0$, $x(t) = \frac{x_0 e^{kt}}{1 + x_0(e^{kt} - 1)}$, para $t \in \mathbb{R}$.
(b) $P(t) = \frac{MP_0 e^{kt}}{M + P_0(e^{kt} - 1)}$.