Cálculo Diferencial e Integral III

1^{o} Semestre 2023/2024

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiom, LEBiol

Ficha de Problemas nº 5

Existência, unicidade, prolongamento e comparação de soluções

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

$$\text{(a) } y' = \frac{t\,y}{1+t^2}\,, \qquad \text{(b) } y' = (2-y)\,(y-1),$$

$$\text{(c) } y' = y\,(1-y^2)\,, \quad \text{(d) } y' = \frac{y+t}{y-t}\,,$$

O que é um campo de direções?

Um campo de direções da equação diferencial

$$y' = f(t,y)$$

é um gráfico constituido por segmentos de recta orientados com origem em cada ponto, $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, onde f está definida. Cada um desses segmentos de recta deve ser tangente ao gráfico da solução da equação diferencial no ponto (t,y); ele é, na verdade, uma representação miniaturizada da recta tangente ao gráfico da solução da equação diferencial que passa no ponto (t,y).

Pode-se traçar um campo de direções de qualquer equação diferencial da forma $y' = f(x,y)$, mas o mesmo só tem utilidade quando f satisfaz as condições do teorema de Picard. Em particular, a unicidade de solução dos problemas de valor inicial é muito importante porque impede que os gráficos de duas soluções com condições iniciais distintas se intersectem; e isto possibilita o posicionamento relativo desses gráficos.

Como traçar um campo de direções?

Para traçar um campo de direções constroi-se um recticulado, por exemplo,

$$\Big\{(n,m)\ :\ n,m \in \mathbb{Z}\Big\}$$

e calcula-se em todos os seus pontos o valor de $f(n,m)$. Os valores obtidos são o declive da recta tangente ao gráfico de $y(x)$ no ponto (n,m). Desenha-se então um pequeno segmento com origem em (n,m) e com declive $f(n,m)$.

Uma vez traçado o campo de direções, podemos usá-lo para esboçar as soluções da equação diferencial. Se estivermos nas condições do teorema de Picard, a unicidade de solução de qualquer problema de valor inicial garante que duas soluções com origem em pontos iniciais distintos nunca se intersectam. Dado que este traçado envolve erros, é a unicidade de solução que torna possível o esboço de soluções qualitativamente semelhantes às soluções exactas.

Exemplo

Vamos traçar o campo de direções e esboçar algumas soluções da equação diferencial

$$y' = y - x$$

Vamos calcular y' usando alguns valores de $(x, y) \in \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2\,,\, -2 \leq n, m \leq 2\}$. Assim para $x = -2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	0	1	2	3	4

Para $x = -1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-1	0	1	2	3

Para $x = 0$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-2	-1	0	1	2

Para $x = 1$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-3	-2	-1	0	1

e para $x = 2$

y	-2	-1	0	1	2
y'	-4	-3	-2	-1	0

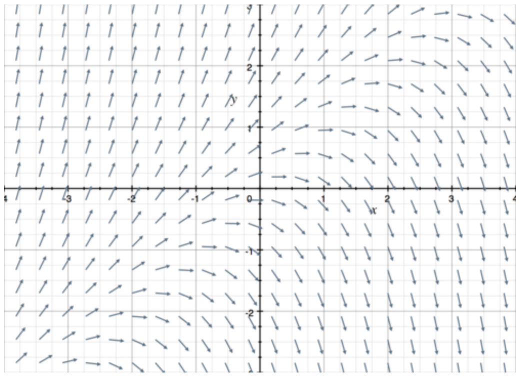

Figura 1: Campo de direções de $y' = y - x$

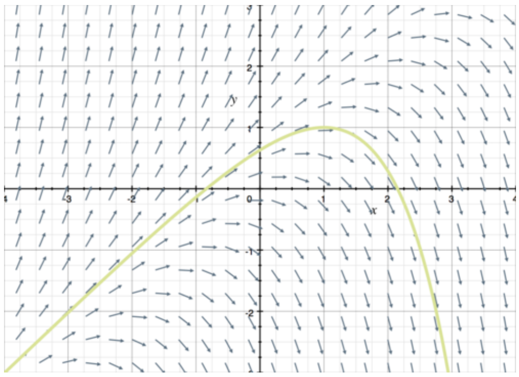

Figura 2: Campo de direções de $y' = y - x$ e a solução que passa em $(1, 1)$

Resolva os problemas cuja solução se apresenta de seguida.

Solução:

(a) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$

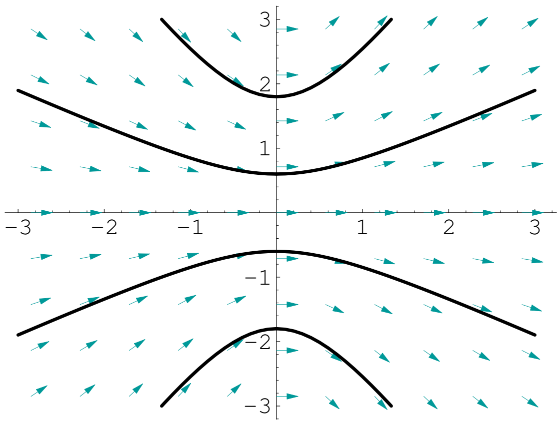

Figura 3: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$

(b) $y' = (2-y)\,(y-1)$

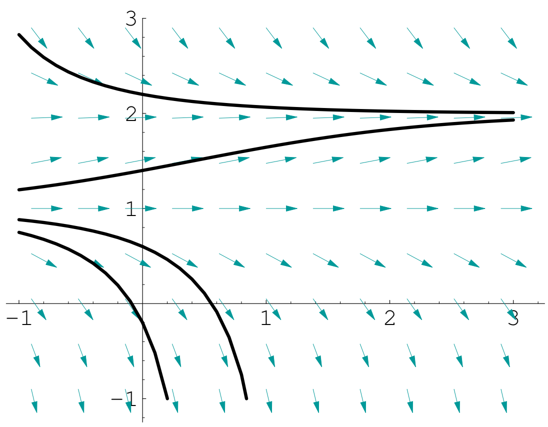

Figura 4: Campo de direções e algumas soluções de $y' = (2-y)\,(y-1)$

(c) $y' = y\,(1-y^2)$

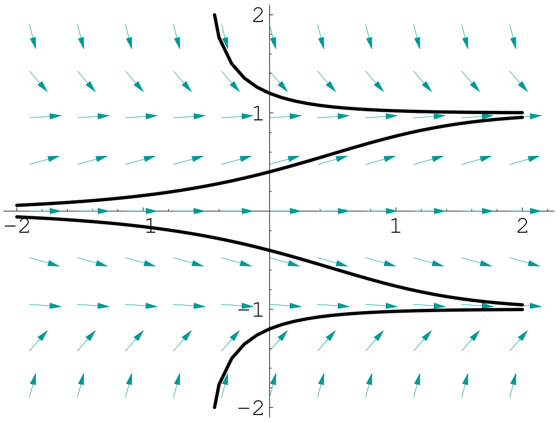

Figura 5: Campo de direções e algumas soluções de $y' = y\,(1 - y^2)$

(d) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$

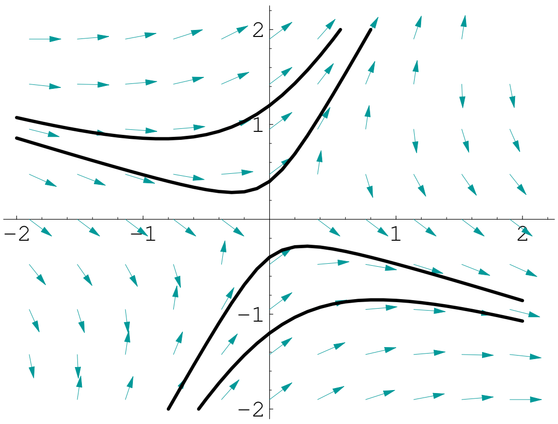

Figura 6: Campo de direções e algumas soluções de $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = \; 2t\,y^{2/3} \\ y(0) & = \; 0\,, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

Resolução

Começamos por notar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI. Por outro lado, se $y(t) \neq 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-2/3}\frac{dy}{dt} = 2t \quad \Leftrightarrow \quad \int y^{-2/3} dy = \int 2t\, dt + c \quad \Leftrightarrow \quad 3y^{1/3} = t^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \left(\frac{t^2+c}{3}\right)^3$$

Visto termos obtido uma função polinomial, verifica-se que estas soluções são de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e também verificam a equação diferencial quando $c \leq 0$ e $y(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{-c}$ (basta substituir a solução geral obtida na equação diferencial). A solução que verifica a condição inicial $y(0) = 0$ é

$$y(t) = \frac{t^6}{27},$$

pelo que acabámos de obter uma segunda solução do PVI.

Podemos agora utilizar o método de "cortar" e "colar" a solução geral

$$y(t) = \frac{(t^2+c)^3}{27} \qquad \text{e} \qquad y(t) \equiv 0$$

e, dessa forma, obter novas soluções do PVI. Para isso é certamente necessário tomar c tal que a função obtida é contínua no ponto de "colagem" (que designamos por t_1):

$$\lim_{t \to t_1} \left(\frac{t^2+c}{3}\right)^3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = -t_1^2$$

Assim, para $t_1 > 0$, define-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq t_1 \\ \dfrac{(t^2-t_1^2)^3}{27} & \text{se } t > t_1 \end{cases}$$

Calculando também as derivadas laterais de y_{t_1} no ponto de "colagem" (exercício) verifica-se que

$$f'_d(t_1) = 0 = f'_e(t_1)$$

Desta forma, y_{t_1} é diferenciável em $\mathbb{R}$ e verifica a equação diferencial para qualquer $t \in \mathbb{R}$; note que foi construida à custa de soluções da equação diferencial, portanto só faltava verificar que a satisfazia também no ponto de "colagem". Além disso, $y_{t_1}(0) = 0$.

De igual modo, para cada $t_2 < 0$

$$y_{t_2}(t) = \begin{cases} \dfrac{(t^3-t_2^2)^3}{27} & \text{se } t < s_0 \\ 0 & \text{se } t \geq s_0 \end{cases}$$

é também solução do PVI.

Finalmente, o facto de existir uma infinidade de soluções deve-se a que a função $f(t,y) = 2ty^{2/3}$ é contínua em $y \geq 0$, mas não é de classe C^1 em qualquer conjunto que contenha pontos da forma $(t,0)$. De facto:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4t}{3}y^{-1/3} = \frac{4t}{3\sqrt[3]{y}} \longrightarrow \infty \qquad \text{quando} \qquad y \to 0^+.$$

3. Para p um número real $1 < p < 2$ considere

$$f(t,y) = p|y|^{\frac{p-1}{p}} \quad , \quad (t,y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere-se o (PVI)

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(0) = 0$$

Mostre que o (PVI) admite uma infinidade de soluções. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

Resolução

Uma das soluçõess do (PVI) é a solução constante $y_c(t) \equiv 0$. Por outro lado, se $y(t) > 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{p}\,y^{-\frac{p-1}{p}}\,\frac{dy}{dt} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(\int \frac{1}{p}\,y^{-1+\frac{1}{p}}dy\Big) = 1 \;\Leftrightarrow\; y^{1/p} = t + c \;\Leftrightarrow\; y(t) = (t+c)^p,$$

com $c \in \mathbb{R}$. Esta solução é continuamente diferenciável e verifica a equação desde que $t+c > 0$, isto é, $t > -c$.

Por outro lado, se $y(t) < 0$ então $|y| = -y$, pelo que:

$$\frac{1}{p}\,(-y)^{-\frac{p-1}{p}}\,\frac{dy}{dt} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(\int -\frac{1}{p}\,(-y)^{-1+\frac{1}{p}}dy\Big) = -1$$

$$\Leftrightarrow\; (-y)^{1/p} = -t + d \;\Leftrightarrow\; y(t) = -(d-t)^p, \qquad \text{com } d \in \mathbb{R}.$$

Esta solução é continuamente diferenciável e verifica a equação desde que $d - t > 0$, isto é, $t < d$.

Podemos definir uma infinidade de soluções "cortando e colando" os três tipos de soluções acima obtidas. Tomando quaisquer $c, d < 0$, e definindo

$$y_{c,d}(t) = \begin{cases} -(d-t)^p & \text{se} \quad t < d \\ 0 & \text{se} \quad d \le t \le -c \\ (t+c)^p & \text{se} \quad t > -c \end{cases}$$

o aluno pode verificar facilmente que $y_{c,d}(t)$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Note que nos pontos $t = d$ e $t = -c$ deve verificar a igualdade dos limites e derivadas laterais.

Para verificar que não há contradição entre estas conclusões e o Teorema de Picard, note-se que f é contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\big|f(t,y) - f(t,0)\big| = \Big|p|y|^{\frac{p-1}{p}}\Big| = \underbrace{p|y|^{-\frac{1}{p}}}_{\substack{\downarrow \;\; \text{quando} \;\; y \to 0 \\ \infty}} \;\; |y - 0|$$

Desta forma, a derivada parcial de f relativamente a y em pontos da forma $(t, 0)$, com $t \in \mathbb{R}$ é infinita, pelo que f não é de classe C^1 em qualquer conjunto aberto que contenha o eixo $y = 0$.

Concluimos então que a continuidade de f implica existência de solução do PVI, mas o facto de f não ser de classe C^1 numa vizinhança de $(0, 0)$ abre a possibilidade de que a unicidade de solução do PVI possa falhar.

4. Seja $z(t) \geq 0$ é uma função real contínua tal que

$$z(t) \leq C + k \int_0^t z(s)ds, \tag{1}$$

para $t \geq 0$, onde C é k são constantes reais positivas. Prove a seguinte desigualdade:

$$z(t) \leq Ce^{kt}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Esta proposição é uma versão simples da conhecida *desigualdade de Gronwall*, sendo muito usada na teoria qualitativa das equações diferenciais.

Resolução

Considere-se a função v definida em $[0, +\infty[$ pelo segundo membro de (1):

$$v(t) \stackrel{\text{def}}{=} C + k \int_0^t z(s)\, ds$$

Note que, por hipótese, $z(t) \leq v(t)$. Pelo teorema fundamental do cálculo, v é de classe C^1 e a sua derivada é dada por:

$$v'(t) = kz(t) \leq kv(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Esta desigualdade é equivalente a:

$$v'(t) - kv(t) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-kt}v'(t) - ke^{-kt}v(t) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(e^{-kt}v(t)\Big) \leq 0.$$

Isto significa que a função $e^{kt}v(t)$ é decrescente em $[0, \infty[$; em particular, para qualquer $t \geq 0$,

$$e^{-kt}v(t) \leq v(0) = C.$$

Conclui-se então que $v(t) \leq Ce^{kt}$, pelo que:

$$z(t) \leq v(t) = Ce^{kt} \qquad \text{para qualquer } \ t \geq 0.$$

5. Dados dois números reais, b_0 e b_1, arbitrários, considere os problemas de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = b_0$$

e

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = b_1$$

e as respectivas soluções:

$$y_0(t) \qquad \text{e} \qquad y_1(t).$$

Suponha também que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é limitada em $\mathbb{R}^2$.

Determine uma função $\varphi(t)$ tal que

$$\big|y_1(t) - y_0(t)\big| \leq \big|b_1 - b_0\big|\varphi(t) \tag{2}$$

para todo o $t \geq 0$. Esta proposição mostra a *dependência contínua* das soluções do PVI da condição inicial.

Sugestão: Utilize a desigualdade de Gronwall (veja o problema anterior).

Resolução:

Dado que $y_0(t)$ é solução do primeiro PVI então

$$y_0(t) = b_0 + \int_0^t f\big(s, y_0(s)\big)\, ds$$

e analogamente, sendo $y_1(t)$ solução do segundo PVI,

$$y_1(t) = b_1 + \int_0^t f\big(s, y_1(s)\big)\, ds$$

$$\begin{aligned}
\big|y_1(t) - y_0(t)\big| &= \left|b_1 + \int_0^t f\big(s, y_1(s)\big)\, ds - b_0 - \int_0^t f\big(s, x_0(s)\big)\, ds\right| \\
&\leq |b_1 - b_0| + \int_0^t \big|f\big(s, y_1(s)\big) - f\big(s, y_0(s)\big)\big|\, ds
\end{aligned}$$

Visto $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K$ em $\mathbb{R}^2$, para certo $K > 0$, então pelo teorema de Lagrange existe $c = c(s)$ (no intervalo de extremos $y_1(s)$ e $y_0(s)$) tal que:

$$\big|f\big(s, y_1(s)\big) - f\big(s, y_0(s)\big)\big| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, c)\right| \big|y_1(s) - y_0(s)\big| \leq K\big|y_1(s) - y_0(s)\big| \tag{3}$$

A desigualdade (3) designa-se por **condição de Lipshitz** relativa a y; K diz-se a **constante de Lipshitz** de f. Desta forma,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \;\leq\; |b_1 - b_0| + K \int_0^t \big|y_1(s) - y_0(s)\big|\, ds$$

onde K é a constante de Lipschitz de f. Aplicando a desigualdade de Gronwall com $C = |b_1 - b_0| > 0$ e $z(t) = \big|y_1(t) - y_0(t)\big| \geq 0$:

$$|y_1(t) - y_0(t)| \;\leq\; |b_1 - b_0| e^{Kt}.$$

Podemos assim tomar $\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} e^{Kt}$ em (2).

6. Mostre que o problema de valor inicial (abrev. PVI)

$$x' = e^{\cos x} \quad , \quad x(0) = 0$$

tem uma solução única definida em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Considere-se $f(t,x) = e^{\cos x}$. Observa-se o seguinte

- $f(t,x)$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = -\text{sen}\, x e^{\cos x}$ está definida e é é contínua em $\mathbb{R}^2$
- A condição inicial $(t_0, x_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

Tem-se então que as condições do teorema de Picard são verificadas em $\mathbb{R}^2$ e, como tal, o PVI admite uma única solução, $x_s(t)$, definida para t numa vizinhança de 0. Para demonstrar que a solução está definida em $\mathbb{R}$ vamos usar o teorema da extensão de soluções: esse teorema diz-nos que se o PVI satisfaz as condições do teorema de Picard então a solução única, $x(t)$, pode ser prolongada a um intervalo maximal, $]a,b[$. Esse intervalo será $\mathbb{R}$ a não ser que a solução $x(t)$ exploda quando $t \to b^-$ (ou quando $t \to a^+$).

Para mostrar que tal não pode acontecer vejamos em primeiro lugar que, para todo o $(t,x) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\cos x| \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq f(t,x) \leq e.$$

Considere-se o PVI auxiliar

$$u' = c \quad , \quad u(0) = 0,$$

(com $c = 0$ ou $c = e$) cuja solução é $x(t) = ct$ (definida em $\mathbb{R}$). Pelo teorema da comparação de soluções, e tendo em conta que $0 \leq f(t,x) \leq e$,

$$0 \leq x(t) \leq et \quad \forall t \geq 0 \qquad \text{e} \qquad et \leq x(t) \leq 0 \quad \forall t \leq 0$$

Mas isto mostra que
$$|x(t)| \leq e|t| \quad \forall t \in \left]a,b\right[.$$
Por isso, $x(t)$ não pode explodir, pelo que está definida em $\mathbb{R}$.

7. Considere o PVI
$$x' = \frac{e^x}{1+e^x} \quad , \quad x(0) = 0.$$
Mostre que existe uma solução única definida em $\mathbb{R}$.
Resolução:

Considere-se $f(t,x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. Observa-se o seguinte

- $f(t,x)$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ está definida e é é contínua em $\mathbb{R}^2$
- A condição inicial $(t_0, x_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

Tem-se então que as condições do teorema de Picard são verificadas em $\mathbb{R}^2$ e, como tal, o PVI admite uma única solução definida, $x(t)$, definida para t numa vizinhança de 0. Atendendo a que
$$|f(t,x)| \leq 1, \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$
e procedendo como no problema anterior, o teorema da comparação de soluções mostra-nos que
$$|x(t)| \leq |t|$$
no intervalo onde $x(t)$ está definida. Isto mostra que a solução não explode, pelo que e está definida em $\mathbb{R}$.

8. Considere-se o problema de valor inicial:
$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2 \quad , \quad y(1) = 0$$
Mostre que que existe $\theta \in \left]1, 1+\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\lim_{t\to\theta} y(t) = +\infty$, ou seja, a solução $y(t)$ do PVI explode quando $t \to \theta$.
Resolução:

Temos, para $t > 1$, $\frac{dy}{dt} > y^2 + 1$ ou seja $\frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{dt} \geq 1$. Integrando ambos os membros desta desigualdade entre 1 e t, obtém-se:

$$\text{arctg}\,\big(y(t)\big) - \underbrace{\text{arctg}\,\big(y(1)\big)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = t - 1$$

pelo que $\text{arctg}\, y \geq t + c$. Assim, a solução do PVI verifica

$$y(t) \geq \text{tg}\,(t-1).$$

Tendo em conta que $\lim\limits_{t \to 1+\frac{\pi}{2}} \text{tg}\,(t-1) = +\infty$, então existe $\theta \in \left]1, 1+\frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$\lim_{t \to \theta} y(t) = +\infty.$$

9. Considere o problema de valor inicial

$$x' = \frac{x\cos\,(t+x)}{1+2x^2} \quad , \quad x(0) = 1$$

Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é $\mathbb{R}$.

Resolução:

A função $f(t,x) = \frac{x\cos\,(t+x)}{1+2x^2}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e é fácil de verificar que também $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$. Pelo Teorema de Picard conclui-se que o PVI admite solução única numa vizinhança do valor inicial $t_0 = 0$. Estimando o módulo de $f(t,x)$:

$$\big|f(t,x)\big| \;=\; \Big|\frac{x\cos\,(t+x)}{1+2x^2}\Big| \;\leq\; \frac{|x|}{1+2x^2} \;\leq\; 1$$

Aplicando o teorema da comparação de soluções da forma usual, verifica-se que a solução $x(t)$ do PVI satisfaz:

$$\begin{aligned} 1 - t \leq x(t) \leq 1 + t \qquad & \forall t \geq 0 \\ 1 + t \leq x(t) \leq 1 - t \qquad & \forall t \leq 0 \end{aligned}$$

Isto prova que a solução não explode. Como o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, pelo teorema de extensão de soluções o intervalo máximo de existência é $\mathbb{R}$.

10. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \ , \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$.

Sugestão. Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Determine explicitamente a função $u(t)$ e mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geqslant \frac{1}{3\big(u(t)\big)^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}}.$$

Depois, integre ambos os membros desta desigualdade entre 0 e t.

Resolução:

Definindo

$$f(t,y) = \frac{1}{3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}}$$

o domínio de f é

$$D = \Big\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}} \neq 0\Big\} = \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(t,y) = (-1,0)\Big\}$$

Começemos por mostrar existência e unicidade de solução local. Verifica-se facilmente que tanto f como $\partial f/\partial y$ são contínuas em D; como também $(t_0, y_0) = (0,1) \in D$, o teorema de Picard assegura existência de uma única solução local do PVI. Isto significa que a solução, $y(t)$, existe e é única para $t \in]-\beta, \beta[$. Em particular, exite uma única solução, $y(t)$, do PVI no intervalo $I = [0, \beta[$. Falta mostrar que podemos tomar $\beta = \infty$, nesta última afirmação.

Pelo teorema de extensão de solução, basta mostrar que nem $(t, y(t))$ converge para fronteira de D quando $t \to \beta$, nem $|y(t)| \to \infty$ quando $t \to \beta$, com $\beta \in \mathbb{R}^+$. Não conhecemos a solução do PVI; contudo, podemos usar o teorema de comparação de soluções.

Como estamos a estudar a solução para $t \geq 0$, e como não existe qualquer ponto fronteiro de D para $t \geq 0$, podemos desde já descartar a possibilidade de $(t, y(t))$ atingir a fronteira de D quando $t \to \beta$.

Para verificar que a solução não explode, basta ter em conta que, para $t \geq 0$,

$$3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}} \geq 0 + 1^{\frac{2}{3}} = 1$$

Assim sendo,

$$0 \leq f(t,y) \leq 1 \tag{4}$$

para $y \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. Considerando os problemas de valor inicial (com $c = 0$ ou $c = 1$)

$$\begin{cases} \dot{u} = c \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

cujas únicas soluções (em $[0, +\infty[$) são dadas por $u(t) = ct + 1$. Usando as desigualdades (4) e o teorema de comparação de soluções, resulta que:

$$1 \leq y(t) \leq t + 1, \qquad \forall t \geq 0. \tag{5}$$

De (5) podemos concluir que

$y(t)$ não explode no extremo superior do intervalo máximo de solução;

$y(t) \geq 1$ para $t \geq 0$.

Desta forma, o teorema de extensão de solução diz-nos que a $y(t)$ está definida no intervalo $I = [0, +\infty[$. Para calcular o limite de $y(t)$ quando $t \to +\infty$, consideremos o PVI auxiliar

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1 \ . \end{cases}$$

A solução geral da equação separável $3u^2 \frac{du}{dt} = 1$ é $u^3 = t + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Usando a condição inicial obtém-se $u(t) = (t+1)^{\frac{1}{3}}$, estando esta solução definida em $[0, +\infty[$. Tendo em conta que, para $y \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$,

$$f(t,y) = \frac{1}{3y^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{3y^3},$$

pelo teorema de comparação de soluções podemos concluir que

$$y(t) \leq u(t) = (t+1)^{\frac{1}{3}}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Mas então:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3\big(y(t)\big)^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}} \geq \frac{1}{3\big(u(t)\big)^2 + (t+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4(t+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4}(t+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Integrando ambos os membros desta desigualdade entre 0 e t, obtém-se

$$y(t) - \underbrace{y(0)}_{\overset{\shortparallel}{1}} \ \geq \ \frac{1}{4}\int_0^t (s+1)^{-\frac{2}{3}}\, ds \ = \ \frac{3}{4}(s+1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^t = \frac{3}{4}(t+1)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4},$$

ou seja,

$$y(t) \;\geq\; \frac{3}{4}(t+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad +\infty \qquad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Podemos assim concluir que:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty.$$