Cálculo Diferencial e Integral III

1^{o} Semestre 2023/2024

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiom, LEBiol

Ficha de Problemas nº 5

Existência, unicidade, prolongamento e comparação de soluções

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

(a) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$ (b) $y' = (2-y)\,(y-1)$ (d) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

3. Majorando e minorando as seguintes equações, obtenha estimativas para os intervalos máximos de definição dos problemas de valor inicial indicados.

(a) $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{arctg}(ty) \ , \ \ y(0) = 2$ (b) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^{\cos(ty)}}{y^3} \ , \ \ y(0) = 1$

(c) $\dfrac{dy}{dt} = y^2 e^y \ , \ \ y(0) = 1$

Nota: Em (c), a função constante igual a 0 é uma solução da equação.

4. Determine o limite quando $t \to \infty$ da solução do problema de valor inicial

$$\left(e^y + \operatorname{sen}^4 y\right) y' = y - y^4 \qquad , \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2 \ , \end{cases}$$

(a) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema numa vizinhança suficientemente pequena de $\frac{1}{2}$ onde esteja definida.

(b) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em $\mathbb{R}$.

(c) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.

6. Considere o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y + e^{-(t+y^4)} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Mostre que o problema tem solução única definida numa vizinhança de 0, $]-\alpha, \alpha[$.

(b) Mostre que o intervalo máximo de solução do problema contém $[0, \infty[$ e determine $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

(c) Escreva uma equação integral que é equivalente ao P.V.I. para $y \in C^1(]-\alpha, \alpha[)$.

7. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y)$$

(a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial $y(t_0) = y_0$ é única.

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y(0) = 0$ satisfaz $-t \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 0$.

(c) Mais geralmente, mostre que

$$|y(t) - y_0| \leq |t - t_0| \quad \forall t$$

(d) Conclua que o intervalo máximo de definição de qualquer das soluções desta equação é $\mathbb{R}$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(t, 0) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e

$$|f(t,y) - f(t,x)| \leq \frac{1}{2}|y - x| \quad , \quad \text{para todos os} \quad (t,x),\ (t,y) \in \mathbb{R}^2$$

Considere o problema de valor inicial $y' = -y + f(t, y)$, com $y(0) = 1$.

(a) Mostre que este problema tem solução única numa vizinhança de $t = 0$.

(b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é $\mathbb{R}$.

(c) Indique o valor de $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

9. (a) Se $x(t)$ é a solução de uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, determine uma equação satisfeita pela função $y(t) = x(-t)$.

(b) Mostre que todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \mathsf{sen}\,(tx) + t^3$$

são funções pares (quando prolongadas ao seu intervalo máximo de definição).

10. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2) \quad , \quad y(1) = 0 \tag{1}$$

(i) Determine a solução de (1) e indique o seu intervalo máximo de solução.

(ii) Considere agora o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1+y^2)e^y \quad , \quad y(1) = 0$$

(a) Sem tentar resolver a equação, justifique que o problema tem localmente uma e uma só solução.

(b) Mostre que o intervalo máximo de existência de solução é limitado superiormente, isto é, existe $\beta > 1$ tal que $\lim_{t\to\beta^-} y(t) = \pm\infty$.

Sugestão: Começe por mostrar que a solução é uma função crescente para $t > 1$, e relacione com o problema (1).

Soluções

1. Ver resoluções na ficha 5 de exercícios resolvidos.

2. Com a solução de equilíbrio $y(x) \equiv 0$ e a solução geral $y_c(x) = \dfrac{(x+c)^2}{4}$, $c \in \mathbb{R}$, podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI):

   – para $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$

$$y_\alpha^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se} \quad x > \alpha \end{cases}$$

   – para $\alpha \in \mathbb{R}_0^-$

$$y_\alpha^-(x) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{4} & \text{se} \quad x < \alpha \\ 0 & \text{se} \quad x \geq \alpha \end{cases}$$

3. (a) $I_{\text{Max}} = \mathbb{R}$ (b) $I_{\text{Max}} =]\alpha, +\infty[$ em que $\alpha \in [-e/4, -e^{-1}/4]$
   (c) $I_{\text{Max}} =]-\infty, \alpha[$ em que $\alpha \in]0, e^{-1}]$

4. $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 1$

5. (a) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$
   (b) Com a solução do (PVI) $y(t) = \sqrt{1 + 12(1-t)^2}$ e a solução geral $y(t) = \sqrt{1 - c(1-t)^2}$, $c \in \mathbb{R}$ podemos definir uma infinidade de soluções do (PVI) definidas em $\mathbb{R}$ por

$$y_c(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + 12(1-t)^2} & \text{se} \quad t \leq 1 \\ \\ \sqrt{1 - c(1-t)^2} & \text{se} \quad t > 1 \end{cases} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

6. (b) $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

8. (c) $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$

9. (a) $\frac{dy}{dt} = -f(-t, y(t))$

10. (i) $y(t) = \operatorname{tg} \dfrac{t^2 - 1}{2}$, e $I_{\text{Max}} = \left]-\sqrt{\pi+1}, \sqrt{\pi+1}\right[$.