TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/2027

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 4

Teorema de Stokes e Potenciais Vectoriais

1 Exercícios Propostos

1. Considere o campo vectorial
$$F(x,y,z) = (y,z,x)$$
e a superfície S igual ao hemisfério $x^2+y^2+z^2=1$, $y \geq 0$, orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva. Calculo o fluxo do $\operatorname{rot} F$ através de S utilizando

   (a) A definição de fluxo.

   (b) O teorema de Stokes.

2. Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$ sendo

   (a) S é a porção do parabolóide $z = x^2+y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2+y^2=4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e
$$F(x,y,z) = (x^2z^2, y^2z^2, xyz).$$

   (b) S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geq 0$, em que se considera a normal ν com primeira componente positiva e
$$F(x,y,z) = (e^{xy}\cos z, (x^2y^2+1)z, -y).$$

   (c) S a superfície parametrizada por $g(u,v) = (u,v,1-u^2-v^2)$, $u>0$, $v>0$, $u+v<1$, sendo ν a normal com terceira componente positiva e
$$F(x,y,z) = (y, -x^2, z).$$

3. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, em que:

   (a) C é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro $x^2+y^2=2y$ com o plano $y=z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e
$$F(x,y,z) = (y+z, -z, y)$$

(b) C é a curva de intersecção do plano $x+z=5$ com o cilindro $x^2+y^2=9$, percorrida no sentido directo quando vista de cima e

$$F(x,y,z) = (xy, 2z, 3y)$$

(c) C é o triângulo de vértices $A=(1,0,0)$, $B=(0,2,0)$ e $C=(0,0,1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante, e

$$F(x,y,z) \;=\; \big(x-z, y-x, z-xy\big).$$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial F ao longo da curva C, sendo:

(a) C o bordo da superfície

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; y^2+z^2=1\;,\; 0<x<1\Big\},$$

orientada com uma normal à sua escolha, e

$$F(x,y,z) = (z, -xy, -xz).$$

(b) C é a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t)\big) \quad , \quad t\in[0,2\pi]$$

e F o campo vectorial dado por

$$F(x,y,z) \;=\; \big(x^2-y, y^2-x, y^2-x^2+z^3\big).$$

5. Considere a superfície

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; y=x^2+z^2\;;\; 1<y<4\Big\},$$

orientada com a normal ν cuja segunda componente é positiva.

(a) Sabendo que S tem densidade superficial de massa dada por $\sigma(x,y,z)=\sqrt{1+4(x^2+z^2)}$ calcule a massa total de S.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (2x, -y, -z)$$

através de S no sentido da normal ν.

6. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

(a) $F(x,y,z) = (yz, -xz, xy-2)$

(b) $F(x,y,z) = (y\operatorname{sen} z, y\operatorname{sen} z, \cos z)$

7. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x^2 + z^2 \ , \ 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária $\overrightarrow{n} = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_y < 0$.

   (a) Calcule a área de S.

   (b) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de $\overrightarrow{n}$, utilizando o teorema da divergência.

   (c) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de $\overrightarrow{n}$, utilizando o teorema de Stokes.

8. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - x^2 - y^2 \ ; x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0\}.$$

   (a) Parametrize a superfície S.

   (b) Calcule a área de S.

   (c) Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ e calcule o trabalho

$$W = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

   no sentido horário quando visto do ponto $(10, 10, 10)$, usando o teorema de Stokes.

   (d) Determine o fluxo de $G(x, y, z) = (x, -y^4 - y, 4y^3z + 2)$ através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o teorema da divergência.

9. Sejam $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e V um domínio nas condições do Teorema de Gauss. Mostre que o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r^3}\overrightarrow{r}$$

através da superfície ∂V é igual a zero quando a origem está no exterior de V. Qual será o valor desse fluxo quando V contiver a origem no seu interior?

2 Soluções

1. $-\pi$

2. (a) 0

   (b) -2π

   (c) $-\frac{5}{6}$

3. (a) -2π
   (b) 9π
   (c) $\frac{3}{2}$
4. (a) 0
   (b) 0
5. (a) 33π
   (b) -15π
6. (a) $\left(2y - \frac{x}{2}(y^2+z^2), 0, \frac{y^2 z}{2}\right)$ (por exemplo)
   (b) $(0, (x+y)\cos z, -xy \operatorname{sen} z)$ (por exemplo)
7. (a) $\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$
   (b) -63π
   (c) -63π
8. (a) $g(u,v) = (u, v, 1-u^2-v^2)$, definida em $U = \{(u,v) : u^2+v^2 < 1 \wedge u > 0 \wedge v > 0\}$
   (b) $\frac{\pi}{24}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$
   (c) $-\frac{\pi}{2}$
   (d) $\frac{\pi}{2}$
9. 4π