

# Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

**Cursos:** LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom, LEMat, LENO

## Ficha de Problemas nº 4

**Equações Vectoriais de 1<sup>a</sup> Ordem (Caso não Homogéneo) e Equações Lineares de Ordem n (Caso Homogéneo)**

### 1 Exercícios Resolvidos

1. Determine  $e^{At}$ , onde  $A$  é a matriz:

$$(a) \ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad (d) \ A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e) \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Resolução:**

**(a)** A matriz  $A$  é uma matriz diagonal, pelo que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

**(b)** A matriz  $A$  é uma matriz triangular superior. A equação vectorial  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ , com  $\mathbf{y}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , é equivalente ao sistema de equações diferenciais lineares:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 4y \\ z' = 4x + 4y + 4z \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações lineares por substituição sucessiva (começando pela primeira equação) obtém-se:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ -\frac{3}{2}ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} + 4bte^{4t} + ce^{4t} \end{bmatrix} \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo a solução na forma  $\mathbf{X}(t) = S(t)\mathbf{C}$ , em que  $\mathbf{C}$  é um vector coluna de constantes (i.e., um vector arbitrário de  $\mathbb{R}^3$ )

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

obtém-se uma matriz solução fundamental (MSF) de  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ :

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Calculando a MSF em  $t = 0$

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} + 6te^{4t} - e^{4t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**(c)** Começamos por calcular uma matriz solução fundamental de  $A$ . Escrevendo  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  na forma de sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + 7y \end{cases}$$

A partir da primeira equação,  $y = \frac{x-x'}{3}$ ; substituindo então  $y$  na segunda equação, ficamos com

$$x'' - 8x' + 16x = 0,$$

cuja solução geral é

$$x(t) = ae^{4t} + bte^{4t}.$$

Como tal,

$$y(t) = -e^{4t} \left( a + \frac{b}{3} + bt \right).$$

Uma matriz solução fundamental calcula-se a partir de:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} a + bt \\ -a - \frac{b}{3} - bt \end{bmatrix} = \underbrace{e^{4t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & -\frac{1}{3} - t \end{bmatrix}}_{S(t)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 - 3t & -3t \\ 3t & 1 + 3t \end{bmatrix}$$

**(d)** Começamos por calcular uma matriz solução fundamental de  $A$ . Escrevendo  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  na forma de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -5x + 3y \end{cases}$$

A partir da primeira equação,  $y = \frac{x' + 3x}{2}$ ; substituindo então  $y$  na segunda equação, ficamos com

$$x'' + x = 0,$$

cuja solução geral é

$$x(t) = a \cos t + b \sin t.$$

Como tal,

$$y(t) = \frac{1}{2}((-a + 3b) \sin t + (b + 3a) \cos t).$$

Uma matriz solução fundamental calcula-se a partir de:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos t + b \sin t \\ \frac{1}{2}((-a + 3b) \sin t + (b + 3a) \cos t) \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos t & 2 \sin t \\ -\sin t + 3 \cos t & \cos t + 3 \sin t \end{bmatrix}}_{S(t)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Como a inversa de  $S(t)$  em  $t = 0$  é

$$S^{-1}(0) = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

tem-se então que:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \cos t - 3 \sin t & 2 \sin t \\ -5 \sin t & 3 \sin t + \cos t \end{bmatrix}$$

(e) Escrevendo a equação vectorial  $Y' = AY$  na forma de sistema:

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -4x - z \end{cases}$$

Notando que a primeira e terceira equações só mencionam  $x$  e  $z$ , começamos por resolvê-las a fim de determinar as soluções  $x(t)$  e  $z(t)$ ; ou seja:

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ z' = -4x - z \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a  $z$  obtemos

$$z = x' - 3x \quad (1)$$

Substituindo na segunda obtém-se

$$(x' - 3x)' = -4x - x' + 3x \Leftrightarrow x'' - 2x' + x = 0 \Leftrightarrow (D - 1)^2 x = 0$$

pelo que

$$x(t) = (a + bt)e^t$$

Substituindo em (1)

$$z(t) = x' - 3x = (a + b + bt)e^t - 3(a + bt)e^t = (b - 2a - 2bt)e^t$$

Vamos agora substituir  $x(t)$  e  $z(t)$  na segunda equação do sistema e resolvê-la em ordem a  $y$ :

$$y' - y = 2x + z = (2a + 2bt)e^t + (b - 2a - 2bt)e^t = be^t \Leftrightarrow (D - 1)y = be^t$$

Aplicando o polinómio aniquilador,  $P_A(D) = (D - 1)$  a ambos os membros da equação anterior, obtém-se  $(D - 1)^2 y = 0$ . Assim sendo, um candidato a solução particular é  $y_p(t) = dte^t$ ; substituindo  $y_p$  na equação  $y' - y = be^t$  obtém-se  $de^t = be^t$ , ou seja,  $d = b$ . Assim sendo:

$$y(t) = ce^t + bte^t = (c + bt)e^t$$

Tem-se então que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a + bt)e^t \\ (c + bt)e^t \\ (b - 2a - 2bt)e^t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 1 - 2t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 1 - 2t & 0 \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação  $Y' = AY$ . Calculando-a em  $t = 0$ , obtém-se

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq Id_3 \quad \text{e} \quad S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 1-2t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2t+1 & 0 & t \\ 2t & 1 & t \\ -4t & 0 & 1-2t \end{bmatrix}$$

2. Sabendo que

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental para o sistema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ , onde  $A$  é um matriz constante, determine

- (a)  $e^{At}$
- (b)  $\frac{d}{dt}e^{At} \Big|_{t=0}$
- (c) A matriz  $A$ .
- (d) Uma solução particular de  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**Resolução:**

(a) Começamos por calcular

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resulta então que:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} + e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} + e^{3t} \end{bmatrix}$$

(b) Usando a definição de derivada de uma função matricial,

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (e^{2t} + e^{3t})' & (e^{2t} - e^{3t})' \\ (e^{2t} - e^{3t})' & (e^{2t} + e^{3t})' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2e^{2t} + 3e^{3t} & 2e^{2t} - 3e^{3t} \\ 2e^{2t} - 3e^{3t} & 2e^{2t} + 3e^{3t} \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\frac{d}{dt}e^{At} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

**(c)** Por definição a matriz  $X(t) = e^{At}$  satisfaz o PVI

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) & \text{para } t \in \mathbb{R} \\ X(0) = I \end{cases}$$

Escrevendo a equação diferencial para  $t = 0$  obtém-se  $\frac{d}{dt}e^{At}\Big|_{t=0} = X'(0) = AX(0) = A$ . Desta forma, usando o resultado da alínea (b):

$$A = \frac{d}{dt}e^{At}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Mais genericamente, se  $S(t)$  é uma matriz fundamental de um equação  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  (não necessariamente igual à exponencial de  $At$ ) ainda assim  $S'(t) = AS(t)$  e  $S(t)$  é invertível, para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ . Assim sendo,  $A = S'(0)S^{-1}(0)$  para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ ; em particular:

$$A = S'(0)S^{-1}(0).$$

Esta fórmula permite recuperar  $A$  a partir de qualquer MSF de  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ ; pode, por exemplo, ser usada como verificação de um cálculo de  $S(t)$ .

**(d)** Pela fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p(t) &= e^{At} \int e^{-At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= e^{At} \int \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-2t} + e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{At} \int \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} e^{2t} + e^{3t} & e^{2t} - e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} + e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine  $e^{At}$ .

(b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c) Sendo  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma solução arbitrária de  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ , determine  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{y}(t)$ .

### Resolução:

(a) Vamos determinar a solução geral do sistema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ , com  $\mathbf{y}(t) = (x(t), y(t))$ :

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$$

A primeira equação é equivalente a  $y = x' + x$ . Substituindo na segunda equação, obtém-se

$$(x' + x)' = -x - 3(x' + x) \Leftrightarrow x'' + 4x' + 4 = 0 \Leftrightarrow (D + 2)^2 x = 0,$$

pelo que  $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$ , com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Substituindo na primeira equação, obtém-se

$$y(t) = x'(t) + x(t) = -c_1 e^{-2t} + c_2(1 - t)e^{-2t}.$$

Desta forma,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}(c_1 + c_2 t) \\ e^{-2t}(-c_1 + c_2(1 - t)) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1 - t \end{bmatrix}}_{S(t)} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

pelo que  $S(t)$  é uma matriz solução fundamental de  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ . Resulta então que:

$$\begin{aligned} e^{At} = S(t)S^{-1}(0) &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1 - t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1 - t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 + t & t \\ -t & 1 - t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Resolução alternativa:

A matriz  $A$  tem um único valor próprio, dado por:

$$\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

O vector próprio associado é solução não nula de

$$\begin{aligned} (A + 2I)\mathbf{v} = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow b = -a \Leftrightarrow \mathbf{v} = (a, -a) = a(1, -1), \end{aligned}$$

com  $a \in \mathbb{R}$ , pelo que podemos escolher  $\mathbf{v}_p = (1, -1)$  como vector próprio. Como não existem dois vectores próprios linearmente independentes associados ao único valor próprio de  $A$ , a matriz não é diagonalizável. Prosseguimos então com o cálculo de um vector próprio generalizado:

$$\begin{aligned}(A + 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_p &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow a = 1 - b \Leftrightarrow \mathbf{v} = (1 - b, b) = (1, 0) - b(1, -1).\end{aligned}$$

Podemos então tomar  $\mathbf{v}_g = (1, 0)$ .

A matriz  $A$  é então semelhante a uma matriz de Jordan  $A = SJS^{-1}$ , com

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim:

$$\begin{aligned}e^{At} &= Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(b) Usando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= e^{At} \left( \mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-As} e^{-2s} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds \right) \\ &= e^{At} \left( \mathbf{y}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 1-s & -s \\ s & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds \right) \\ &= e^{At} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds \right) \\ &= e^{At} \begin{bmatrix} 1+t \\ -1-t \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} (1+t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= (1+t)e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

**Resolução alternativa:**

O polinómio característico da matriz  $A$  é  $P(\lambda) = (\lambda + 2)^2$ . Pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem-se que a matriz  $A$  verifica a equação dos valores próprios, isto é

$$P(A) = (A + 2Id)^2 = 0,$$

e sendo assim a matriz  $A + 2Id$  é uma matriz nilpotente e a série da exponencial é uma série finita (neste caso tem apenas 2 termos). Então

$$e^{At} = e^{(-2Id+A+2Id)t} = e^{-2Idt+(A+2Id)t}.$$

Dado que as matrizes  $-2Id$  e  $A + 2Id$  comutam, tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{-2Idt} e^{(A+2Id)t} = e^{-2t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+2Id)^n t^n}{n!} \\ &= e^{-2t} (Id + (A+2Id)t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) A solução geral da equação  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  é:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} c_1 + (c_1 + c_2)t \\ c_2 - (c_1 + c_2)t \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + (c_1 + c_2)te^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{2t}} = 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (para quaisquer  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ).

4. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule  $e^{At}$ .

(b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(1) = (1, 1, 1) \end{cases}$$

onde  $\mathbf{h}(t) = (0, 2e^t, e^t)$ .

**Resolução:**

**(a)** Tendo em conta que  $A$  é uma matriz na forma canónica de Jordan (com dois blocos de Jordan):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

**(b)** Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{A(t-s)} \mathbf{h}(s) ds \\ &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{t-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^s \\ e^s \end{bmatrix} ds \\ &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t \begin{bmatrix} 2t-2s \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} \int_1^t (2t-2s) ds \\ \int_1^t 2ds \\ \int_1^t ds \end{bmatrix} = e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} (2ts-s^2)|_{s=1}^t \\ 2s|_{s=1}^t \\ s|_{s=1}^t \end{bmatrix} \\ &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} 2t^2-2t+1 \\ 2t-2 \\ t-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para concluir o cálculo, resta calcular a primeira parcela:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{t-1} \begin{bmatrix} 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} t^2-2t+1 \\ 2t-2 \\ t-1 \end{bmatrix} \\ &= e^{t-1} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} (t-1)^2 \\ 2(t-1) \\ t-1 \end{bmatrix} \\ &= e^{t-1} \begin{bmatrix} t+e(t-1)^2 \\ 2e(t-1) \\ e(t-1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea.  
 (b) Sendo  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$  a solução do problema não homogéneo, determine  $y_2(3)$ .

**Resolução:**

(a) Visto a matriz  $A$  ser da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$

o que facilita bastante os cálculos. Comecemos por calcular  $e^{A_1 t}$  tendo em conta que  $A_1 = -2I + N$ , onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N^2 = 0,$$

então  $e^{-2It} = e^{-2t}I$  e

$$e^{Nt} = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $(-2I)N = N(-2I)$  então:

$$e^{A_1 t} = e^{-2It}e^{Nt} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora calcular  $e^{A_2 t}$ . Os valores próprios de  $A_2$  são  $1+2i$  e  $1-2i$  associados (respectivamente) aos vectores próprios  $\mathbf{v}_1 = (1, i)$  e  $\mathbf{v}_2 = (1, -i)$ . Sendo assim

$$A_2 = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

e, consequentemente,

$$e^{A_2 t} = S e^{\Lambda t} S^{-1} = \frac{e^t}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$$

e a solução geral da equação vectorial homogénea é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} \\ 3c_1 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} \\ c_3 e^t \cos(2t) + c_4 e^t \sin(2t) \\ -c_3 e^t \sin(2t) + c_4 e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$$

com  $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$ .

**(b)** Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial dado será

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{2s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resulta pois que  $y_2(t) = 1 - e^{-2t}$ , pelo que:

$$y_2(3) = 1 - e^{-6}.$$

6. (a) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial  $x(0) = y(0) + 1 = 1$ .

(b) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial  $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$ .

**Resolução:**

(a) Resolvendo a segunda equação em ordem a  $x$  obtém-se

$$x = \frac{y' + y}{2} \quad (2)$$

Substituindo na primeira equação

$$\left(\frac{y' + y}{2}\right)' = \frac{y' + y}{2} - y \Leftrightarrow y'' + y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado tem raízes complexas conjugadas  $\pm i$  (com multiplicidade 1 cada), e assim uma base complexa para o espaço de soluções é

$$\mathcal{B}_c = \{e^{it}, e^{-it}\}$$

e uma base real será

$$\mathcal{B}_r = \{\cos t, \operatorname{sen} t\}$$

pelo que

$$y(t) = a \cos t + b \operatorname{sen} t, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Substituindo em (2) obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2}(y' - y) = \frac{e^{2t}}{2} \left( (a + b) \cos t + (b - a) \operatorname{sen} t \right)$$

Então

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (a + b) \cos t + (b - a) \operatorname{sen} t \\ 2a \cos t + 2b \operatorname{sen} t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2 \cos t & 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2 \cos t & 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) para a equação  $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ . Dado que

$$S(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t & \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2 \cos t & 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t & \cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

pelo que a solução pedida é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

**(b)** Dado que nas duas primeiras equações não há dependência em  $z$  podemos concluir de imediato por (i) que

$$x(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \quad \text{e} \quad y(t) = 2 \operatorname{sen} t$$

Falta então determinar  $z$ , ou seja resolver o PVI

$$z' = 2 \operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)z \quad , \quad z(0) = 1$$

Trata-se de uma equação linear, de factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \operatorname{sen} t dt} = e^{-\cos t}$$

Então, a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-\cos t} z \right) = 2 \operatorname{sen} t e^{-\cos t} \Leftrightarrow e^{-\cos t} z = 2 e^{-\cos t} + c \Leftrightarrow z(t) = 2 + c e^{\cos t}$$

Dado que  $z(0) = 1$ , conclui-se

$$z(t) = 2 - e^{\cos t - 1}$$

7. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

- O polinómio diferencial  $D^4(D + 1)^2$  é um polinómio aniquilador das funções  $te^{-t}$  e  $t^3$
- $e^{\lambda t}v$  é solução do sistema  $Y' = AY$ , quaisquer que sejam o vector  $v$  e o escalar  $\lambda$
- $e^{At}v$  é solução do sistema  $Y' = AY$ , qualquer que seja o vector  $v$
- Se  $S(t)$  é uma matriz fundamental do sistema  $Y' = AY$ , então  $S^{-1}(t)$  é solução do sistema  $Y' = -YA$

## Resolução:

**(a) Verdadeira.** O polinómio aniquilador,  $P(D)$ , de uma função  $f(t)$  é um polinómio diferencial tal que  $P(D)f(t) = 0$ . Podemos verificar directamente:

$$D^4(t^3) = 0 \quad , \quad D^3(t^3) = 6 \neq 0$$

e

$$(D + 1)^2(te^{-t}) = (te^{-t})'' + 2(te^{-t})' + te^{-t} = 0 \quad , \quad (D + 1)(te^{-t}) = e^{-t} \neq 0$$

**(b) Falsa.** O resultado é verdadeiro sse  $\lambda$  for valor próprio de  $A$  associado ao vector próprio  $v$ .

**(c) Verdadeira.** Observe-se que sendo  $Y = e^{At}v$

$$Y' = \left( e^{At}v \right)' = Ae^{At}v = AY$$

**(d) Verdadeira** - Dado que  $S(t)S^{-1}(t) = Id$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  tem-se que

$$\left( S(t)S^{-1}(t) \right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S'(t)S^{-1}(t) + S(t)\left( S^{-1}(t) \right)' = 0$$

Visto  $S(t)$  ser uma (MSF) associada à equação  $Y' = AY$ , tem-se que  $S'(t) = AS(t)$ . Substituindo

$$AS(t)S^{-1}(t) + S(t)\left( S^{-1}(t) \right)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left( S^{-1}(t) \right)' = -S^{-1}(t)A$$

8. Determine a solução geral das seguintes equações

(a)  $y'' + y = 2e^t + t^2$

(b)  $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{e^{3t}}{t}$ , para  $t > 0$ .

(c)  $y'' + 4y = \sin 2t$

## Resolução:

(a) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + y = 0,$$

é  $P(r) = r^2 + 1 = (r - i)(r + i)$ , cujas raízes são  $\pm i$  (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como os polinómios aniquiladores de  $e^t$  e de  $t^2$  são, respectivamente,  $D - 1$  e  $D^3$ , então o polinómio aniquilador de  $b(t) = 2e^t + t^2$  é

$$P_A(D) = (D - 1)D^3.$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D - i)(D + i)y = P_A(D)(2e^t + t^2) = 0,$$

ou seja,

$$(D - 1)D^3(D - i)(D + i)y = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t}_{y_G(t)} + a + bt + ct^2 + de^t \\ &= y_G(t) + a + bt + ct^2 + de^t \end{aligned}$$

para certos  $c_1, c_2, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' + y = 2e^t + t^2 \quad (3)$$

da forma  $y_p(t) = a + bt + ct^2 + de^t$ . Como

$$\begin{aligned} y'_p(t) &= b + 2ct + de^t \\ y''_p(t) &= 2c + de^t \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (3), obtemos

$$2c + de^t + a + bt + ct^2 + de^t = t^2 + 2e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ 2d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Assim  $y_p(t) = -2 + t^2 + e^t$  é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (6) é

$$y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t - 2 + t^2 + e^t, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

é  $P(r) = r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2$ , que tem uma única raiz,  $r = 3$ , com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dado que  $\frac{e^{3t}}{t}$  não é combinação linear de funções que sejam soluções de equações lineares homogéneas, vamos usar a fórmula da variação das constantes para determinar uma solução particular de

$$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \quad (4)$$

Para esta equação, a matriz wronskiana é

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & t e^{3t} \\ 3e^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}$$

e a sua inversa é, então, relativamente fácil de calcular:

$$W^{-1}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & 1+3t \end{bmatrix}^{-1} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= [e^{3t} \quad t e^{3t}] \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^{3t} + \frac{1}{t}e^{3t} \end{bmatrix} dt \\ &= e^{3t} [1 \quad t] \int e^{-3t} \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix} e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 + \frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\ &= e^{3t} [1 \quad t] \int \begin{bmatrix} -4t - 1 \\ 4 + \frac{1}{t} \end{bmatrix} dt \\ &= e^{3t} [1 \quad t] \begin{bmatrix} -2t^2 - t \\ 4t + \log t \end{bmatrix} \\ &= e^{3t} (-2t^2 - t + 4t^2 + t \log t) = (2t^2 + t \log t)e^{3t} - te^{3t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação (4) é, então (para  $t > 0$ ):

$$y(t) = y_G(t) + y_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + (2t^2 + t \log t)e^{3t}, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Note que o termo  $-te^{3t}$  da solução particular pode, obviamente, ser absorvido pelo termo  $c_2 t e^{3t}$  de  $y_G(t)$ .

(c) O polinómio característico da equação homogénea associada,

$$y'' + 4y = 0,$$

é  $P(r) = r^2 + 4 = (r - 2i)(r + 2i)$ , cujas raízes são  $\pm 2i$  (ambas com multiplicidade 1). Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

O polinómio aniquilador de  $b(t) = \sin 2t$  é

$$P_A(D) = (D - 2i)(D + 2i)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D - 2i)(D + 2i)y = P_A(D) \sin 2t = 0,$$

ou seja,

$$(D - 2i)^2(D + 2i)^2y = 0.$$

Como várias raízes do polinómio característico da equação homogénea (neste caso, todas) coincidem com raízes do polinómio aniquilador, trata-se de uma **equação diferencial linear com ressonância**.

A solução geral da equação anterior é

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t}_{y_G(t)} + at \cos 2t + bt \sin 2t \\ &= y_G(t) + at \cos 2t + bt \sin 2t \end{aligned}$$

para certos  $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R}$ . Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$y'' + 4y = \sin 2t \quad (5)$$

da forma  $y_p(t) = at \cos 2t + bt \sin 2t$ . Como

$$\begin{aligned} y'_p(t) &= (a + 2bt) \cos 2t + (b - 2at) \sin 2t, \\ y''_p(t) &= 4(b - at) \cos 2t + 4(-a - bt) \sin 2t, \end{aligned}$$

substituindo estas expressões na equação (5), obtemos

$$4b \cos 2t - 4a \sin 2t = \sin 2t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esta equação é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 4b = 0 \\ -4a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Assim  $y_p(t) = -\frac{1}{4}t \cos 2t$  é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (5) é

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{1}{4}t \cos 2t, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Comparando as soluções da equação homogénea com as da não homogénea, vê-se que o efeito da ressonância (provocada pelo termo não homogéneo,  $b(t) = \sin 2t$ ) é o aparecimento de oscilações de amplitude crescente, na solução.

9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 8t + 2e^{2t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

- (a) Escreva e resolva a equação homogénea associada.
- (b) Determine uma solução particular da equação diferencial.
- (c) Resolva o problema de valor inicial.

**Resolução:**

- (a) A equação homogénea associada é

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

O seu polinómio característico,  $P(R) = R^2 - 4R + 4 = (R - 2)^2$ , tem uma única raiz,  $R = 2$ , com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t},$$

com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

- (b) O aniquilador de  $b(t) = 8t + 2e^{2t}$  é

$$P_A(D) = D^2(D - 2)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$P_A(D)(D - 2)^2 y = P_A(D)(8t + 2e^{2t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D^2(D - 2)^3 y = 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \\ &= y_G(t) + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t \end{aligned}$$

para certos  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ . Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$(D - 2)^2 y = 8t + 2e^{2t} \tag{6}$$

da forma  $y_p(t) = c_3 t^2 e^{2t} + c_4 + c_5 t$ . Substituindo esta expressão na equação (6), obtemos

$$2c_3 e^{2t} + 4c_4 - 4c_5 + 4c_5 t = 8t + 2e^{2t}, \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R},$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2c_3 = 2 \\ 4c_4 - 4c_5 = 0 \\ 4c_5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_4 = 2 \\ c_5 = 2 \end{cases}$$

Assim  $y_p(t) = t^2 e^{2t} + 2 + 2t$  é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (6) é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + t^2 e^{2t} + 2 + 2t, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Como  $y'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2(1 + 2t)e^{2t} + (2t + 2t^2)e^{2t} + 2$ , resulta das condições iniciais que:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + 2 \\ 2 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = (-1 + 2t + t^2)e^{2t} + 2 + 2t.$$

## 10. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais  $y(0) = y'(0) = 1$

**Resolução:**

A solução da equação é da forma

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x)$$

sendo  $y_g$  a solução geral da equação homogénea associada e  $y_p$  uma solução particular da equação completa. Começemos por calcular  $y_g$ . As raízes do polinómio característico associado são

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \text{ ou } r = 3$$

Sendo assim,  $e^x$  e  $e^{3x}$  são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea, pelo que

$$y_g(t) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

Para calcular  $y_p$ , note que somos forçados a utilizar a fórmula da variação das constantes, pois o termo não homogéneo,

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

não é solução de qualquer equação diferencial linear de coeficientes constantes. Assim sendo,

$$y_p(x) = [e^x \quad e^{3x}] \int^x W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds$$

em que  $W(x)$  é a matriz Wronskiana associada:

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} y_p(x) &= [e^x \ e^{3x}] \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-s} & -e^{-s} \\ -e^{-3s} & e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\ &= [e^x \ e^{3x}] \int^x \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}} \\ \frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}} \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} [e^x \ e^{3x}] \begin{bmatrix} \log(1+e^{-x}) \\ -\frac{e^{-2x}}{2} + e^{-x} - \log(1+e^{-x}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left( e^x \log(1+e^{-x}) - \frac{e^x}{2} + e^{2x} - e^{3x} \log(1+e^{-x}) \right) \\ &= \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^x}{4} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x}) \end{aligned}$$

onde calculámos a primitiva de  $\frac{e^{-3s}}{1+e^{-s}}$  fazendo a substituição  $e^{-s} = t$ . Assim sendo, a solução geral da equação é:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + \underbrace{\left( \tilde{c}_2 - \frac{1}{4} \right) e^{3x}}_{\stackrel{\parallel}{c_2}} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log(1+e^{-x})$$

Dado que  $y(0) = y'(0) = 1$ , tem-se que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ c_1 + 3c_2 + 1 - \log 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 + 3c_2 = \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \\ c_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2 \end{cases}$$

pelo que

$$y(x) = \frac{3e^x - e^{3x}}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^x - e^{3x}}{2} \log \left( \frac{1+e^{-x}}{2} \right)$$

11. Considere a equação diferencial linear não homogénea de coeficientes não constantes:

$$y''' - \frac{3}{x}y'' = \frac{20}{x^2} \tag{7}$$

onde a solução,  $y(x)$ , está definida no intervalo  $I = ]0, \infty[$ .

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea.  
 (b) Determine a solução geral da equação (7).

**Resolução:**

(a) A equação homogénea associada a (7) é

$$y''' - \frac{3}{x}y'' = 0.$$

Fazendo a substituição  $z = y''$  obtém-se a equação linear homogénea de 1ª ordem

$$z' - \frac{3}{x}z = 0,$$

cuja solução geral é dada por

$$z(x) = Ke^{\int \frac{3}{x}dx} = Ke^{3\log x} = Kx^3, \quad \text{com } K \in \mathbb{R},$$

para  $x > 0$ . Resolvendo agora a equação diferencial

$$y'' = z(x) = Kx^3$$

(basta primitivar duas vezes) obtém-se

$$y(x) = a + bx + \frac{K}{20}x^5 = a + bx + cx^5 \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(b) A solução geral da equação é da forma

$$y(x) = a + bx + cx^5 + y_p(x)$$

em que  $y_p(x)$  é uma solução particular da equação. Pela fórmula de variação das constantes

$$y_p(x) = [1 \ x \ x^5] \int W^{-1}(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx$$

em que a  $W(x)$  é a matriz wronskiana associada à equação:

$$W(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^5 \\ 0 & 1 & 5x^4 \\ 0 & 0 & 20x^3 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= [1 \ x \ x^5] \int \frac{1}{20x^3} \begin{bmatrix} 20x^3 & -20x^4 & 4x^5 \\ 0 & 20x^3 & -5x^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{20}{x^2} \end{bmatrix} dx \\
&= [1 \ x \ x^5] \int \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{5}{x} \\ \frac{1}{x^5} \end{bmatrix} dx \\
&= [1 \ x \ x^5] \begin{bmatrix} 4x \\ -5 \log x \\ -\frac{1}{5x^4} \end{bmatrix} = \frac{19}{5}x - 5x \log x
\end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral da equação é

$$y(x) = a + \underbrace{\left(\tilde{b} - \frac{19}{5}\right)x + cx^5 - 5x \log x}_{\stackrel{!!}{b}} = a + bx + cx^5 - 5x \log x, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

12. Sendo  $R(x)$  uma função real de variável real contínua e  $k \neq 0$ , mostre que a função

$$y_p(x) = \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \sin(k(x-t)) dt$$

é solução particular de  $y'' + k^2y = R(x)$ .

**Resolução:**

Sendo  $a(x)$  e  $b(x)$  funções de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}$  e  $f(t, x)$  contínua e com derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  também contínua (ambas em  $\mathbb{R}^2$ ), a regra de Leibniz garante-nos que:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, x) dt \right) = f(b(x), x) b'(x) - f(a(x), x) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt$$

Como estamos nas condições enunciadas — note que  $f(t, x) = R(t) \sin(k(x-t))$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$  e tem derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x} = kR(t) \cos(k(x-t))$$

também contínua (em  $\mathbb{R}^2$ ) — podemos usar a regra de Leibniz para calcular:

$$\begin{aligned}
 y'_p(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{k} \int_0^x R(t) \sin(k(x-t)) dt \right) \\
 &= \frac{1}{k} R(x) \sin(k(x-x)) + \int_0^x R(t) \cos(k(x-t)) dt \\
 &= \int_0^x R(t) \cos(k(x-t)) dt
 \end{aligned}$$

Aplicando de novo da regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
 y''_p(x) &= \frac{d}{dx} \left( \int_0^x R(t) \cos(k(x-t)) dt \right)' \\
 &= R(x) \cos(k(x-x)) - k \int_0^x R(t) \sin(k(x-t)) dt \\
 &= R(x) - k^2 y_p(x)
 \end{aligned}$$

Em conclusão:

$$y''_p + k^2 y_p = R(x) - k^2 y_p(x) + k^2 y_p(x) = R(x).$$