

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/2026

**Cursos:** LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom, LEMec, LENO

### Ficha de Problemas nº 3

#### Equações Diferenciais de Ordem $n$ (Caso Homogéneo) e Equações Vectoriais de 1ª Ordem (Caso Homogéneo)

1. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a)  $y'' - 6y' + 8y = 0$

(b)  $y'' + 8y' + 41y = 0$

(c)  $(D + 2)^2(D^2 - 2D + 5)^3(D - 1)y = 0$

(d)  $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

(e)  $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y'' = 0$

2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a)  $y''' - y'' + y' - y = 0$  verificando  $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$

(b)  $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$  verificando  $y(0) = y'(0) = 1$  e  $y''(0) = 4$

(c)  $y^{(3)} + 4y'' - 5y' = 0$  verificando  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -7$  e  $y''(0) = 23$

(d)  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$  verificando  
 $y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0$  para quaisquer  $a_i \in \mathbb{R}$ .

3. Seja  $m$  um número real estritamente positivo. Obtenha a solução do (PVI)

$$y''' - 3my'' + 3m^2y' - m^3y = 0 \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y''(0) = 1$$

4. Considere a equação diferencial

$$y''' + a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

onde  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  são constantes reais. Sabe-se que duas soluções linearmente independentes desta equação são dadas por  $y_1(x) = xe^{-x}$  e  $y_2(x) = e^{2x}$ .

(a) Encontre uma terceira solução linearmente independente.

- (b) Determine  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  com as propriedades acima descritas.
5. Obtenha as equações lineares homogêneas de coeficientes constantes, de menor ordem possível, cujo coeficiente da derivada de maior ordem é igual a 1 e que têm as funções abaixo como solução:
- (a)  $e^x, e^{-x}, e^{2x}, e^{-2x}$ .
- (b)  $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \cos x, \operatorname{sen} x$
- (c)  $1, x, e^x$ ;

6. Determine a solução geral dos sistemas:

$$(a) \begin{cases} x' = -4x - 3y \\ y' = 2x + 3y \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - y \\ z' = -x - z \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases}$$

7. Resolva o problema de valor inicial  $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$ , onde:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

**Sugestão:** determine uma solução particular constante.

## Soluções

1. (a)  $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$   
 (b)  $y(x) = e^{-4x}(c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x))$   
 (c)  $y(t) = (A + Bt)e^{-2t} + (C + Dt + Et^2)e^t \cos 2t + (F + Gt + Ht^2)e^t \sin 2t + Ie^t$  com  $A, B, C, D, E, F, G, H, I \in \mathbb{R}$   
 (d)  $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t$  com  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$   
 (e)  $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t + c_5 t^2 e^t$
2. (a)  $y(t) = \cos t + \sin t$     (b)  $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$   
 (c)  $y(t) = 5 - 2e^t + e^{-5t}$     (d)  $y(t) = 0$
3.  $y(x) = \frac{1}{2}t^2 e^{mx}$
4. (b)  $a_0 = 0, a_1 = -3$  e  $a_2 = -2$
5. (a)  $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$     (b)  $y^{(4)} - y = 0$     (c)  $y''' - y'' = 0$
6. **Nota:** as soluções são apresentadas a menos de uma transformação linear da base do espaço de soluções. Para obter uma dessas bases pode-se utilizar vários métodos, produzindo outras tantas respostas equivalentes.
 

(a)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{-3t} \\ -2e^{2t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos t - \sin t \\ \sin t \\ \sin t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 & 1 + 2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$
7. (a)  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$     (b)  $\mathbf{X}(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} -3t + 4 \\ 3t - 3 \end{bmatrix}$   
 (c)  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{5(t-1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$     (d)  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
8.  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ , onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$