

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Cursos: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

### Ficha de Problemas Resolvidos nº 1 Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

1. Indique a ordem da equação diferencial  $y'' + \pi^2 y = 0$ . Verifique que  $y(x) = a \cos(\pi x) + b \sin(\pi x)$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  é solução e  $y(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $y'(\frac{1}{2}) = 0$ .

#### Resolução:

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (linear). Para verificar que a função dada é solução, vamos substituir e verificar que se obtém uma proposição verdadeira. Como

$$y'(x) = -\pi a \sin(\pi x) + \pi b \cos(\pi x), \quad y''(x) = -\pi^2 a \cos(\pi x) - \pi^2 b \sin(\pi x),$$

então

$$y''(x) + \pi^2 y(x) = -\pi^2 a \cos(\pi x) - \pi^2 b \sin(\pi x) + \pi^2 a \cos(\pi x) + \pi^2 b \sin(\pi x) = 0$$

A afirmação é verdadeira para todo  $x$ ,  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$  e assim,  $y(x)$ , é solução da equação. Para calcular as constantes  $a$  e  $b$  de modo a que  $y(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $y'(\frac{1}{2}) = 0$ , substituímos na solução e na sua derivada  $x$  por  $1/2$ :

$$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = a \cos \frac{\pi}{2} + b \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ y'(\frac{1}{2}) = -\pi a \sin \frac{\pi}{2} + \pi b \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

pelo que a solução da equação que verifica as condições dadas é  $y(x) = \sin(\pi x)$ .

2. Determine a solução do problema de valor inicial  $y' = xe^{x^2/2}$  com  $y(1) = 2$ .

### Resolução:

Primitivando ambos os membros da equação

$$\int y'(x)dx = \int xe^{x^2/2}dx \Leftrightarrow y(x) = e^{x^2/2} + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição inicial,  $2 = y(1) = e^{1/2} + c$ , pelo que  $c = 2 - e^{1/2}$ . A solução do problema de valor inicial é, pois:

$$y(x) = e^{x^2/2} - e^{1/2} + 2.$$

3. Determine todas as soluções da equação diferencial ordinária linear

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = (x - 2)e^x, \quad \text{para } x > 0.$$

### Resolução:

Para  $x \neq 0$ , a equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{(x - 2)}{x}e^x \quad (1)$$

Trata-se de uma equação linear, e admite um factor integrante,  $\mu(x)$  dado por

$$\mu' = \frac{2}{x}\mu \Leftrightarrow \mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por  $\mu$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2y) &= (x^2 - 2x)e^x \Leftrightarrow x^2y = \int (x^2 - 2x)e^x dx + c \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x^2} \left( (x^2 - 4x + 4)e^x + c \right) \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x^2} \left( (x - 2)^2 e^x + c \right) \end{aligned}$$

em que  $c \in \mathbb{R}$ .

4. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v - \frac{1}{1+u^2} = 0, \quad v(0) = 1.$$

### Resolução:

A equação é equivalente a

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v = \frac{1}{1+u^2} \quad (2)$$

que é uma equação linear em  $v$  e admite um factor integrante,  $\mu(u)$ , dado pela equação

$$\mu' = \frac{2u}{1+u^2}\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2u}{1+u^2} \Leftrightarrow \log \mu = \log(1+u^2) \Leftrightarrow \mu = 1+u^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2) por  $\mu$  obtemos

$$\begin{aligned} (1+u^2)\frac{dv}{du} + 2uv &= 1 \Leftrightarrow \frac{d}{du}\left((1+u^2)v\right) = 1 \\ \Leftrightarrow (1+u^2)v &= u + c \\ \Leftrightarrow v(u) &= \frac{u+c}{1+u^2} \end{aligned}$$

Dado que

$$1 = v(0) = c,$$

a solução do PVI é

$$v(u) = \frac{u+1}{u^2+1}$$

5. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto. O perito da policia chegou à 1:00h da madrugada e, imediatamente, mediu a temperatura do cadáver, que era de 34,8 C. Uma hora mais tarde a temperatura era 34,1°C. A temperatura do quarto onde se encontrava a vítima manteve-se constante a 20°C. Estime a hora a que se deu o crime, admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5°C.

### Resolução:

Seja  $T(t)$  a temperatura do corpo no instante  $t$ , o modelo matemático para a lei de arrefecimento de Newton é:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde  $T_a$  é a temperatura ambiente e  $-k < 0$  é a constante de proporcionalidade (do arrefecimento do corpo). Temos pois, como no problema anterior, que

$$T' + kT = 20k \Leftrightarrow (e^{kt}T)' = 20ke^{kt} \Leftrightarrow T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

Tomando  $t_0 = 0$  o instante em que a primeira medição de temperatura foi feita, temos que

$$T(0) = 34.8 \Leftrightarrow c = 14.8$$

e assim

$$T(t) = 20 + 14.8e^{-kt}$$

Para determinar a taxa de arrefecimento,  $k$ , usamos a outra medição:

$$T(1) = 34.1 \Leftrightarrow 34.1 = 20 + 14.8e^{-k} \Leftrightarrow k = -\log \frac{14.1}{14.8} \approx 0.0485$$

e então

$$T(t) = 20 + 14.8e^{-0.0485t}$$

Para saber quando o crime foi cometido, pretende-se saber a que horas a temperatura do corpo era de 36.5 C, queremos determinar  $t$  tal que

$$T(t) = 36.5 \Leftrightarrow 36.5 = 20 + 14.8e^{-0.0485t} \Leftrightarrow t = -\frac{\log \frac{16.5}{14.8}}{0.0485} \approx -2.24$$

Conclui-se que o crime foi cometido por volta das 22h 45min.

## 6. Considere a equação diferencial

$$2x \frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

- Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável  $v = y^{-4}$ .
- Determine a solução que verifica  $y(1) = 1$ , indicando o seu intervalo máximo de existência.

**Resolução:**

(a) Seguindo a sugestão, fazemos  $v(x) = [y(x)]^{-4}$  pelo que

$$\frac{dv}{dx} = -4y^{-5} \frac{dy}{dx}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por  $-4y^{-5}$ , obtém-se:

$$2x \underbrace{\left(-4y^{-5} \frac{dy}{dx}\right)}_{\frac{dv}{dx}} + 2x \underbrace{(-4y^{-5}y^5)}_1 + 4 \underbrace{y^{-5}y}_v = 0,$$

ou seja,

$$2x \frac{dv}{dx} - 8x + 4v = 0$$

Dividindo por  $2x$  e rearranjando os termos, obtém-se a equação linear não homogénea:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = 4 \quad (3)$$

O seu factor integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$$

Multiplicando todos os termos da equação (3) por  $\mu(x)$

$$x^2 \frac{dv}{dx} + 2xv = 4x^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2v) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2v = \frac{4x^3}{3} + c \Leftrightarrow v(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Finalmente, desfazendo a mudança de variável,

$$y^{-4}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow y(x) = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}}} = \pm \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 + c}}$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

(b) Dado que  $y(1) = 1$ , conclui-se que  $y(x)$  é positivo e  $c = -1$ . Como tal a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 - 1}}.$$

O domínio de diferenciabilidade da função  $y(x)$  é

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4x^3 - 1 \neq 0 \text{ e } \frac{3x^2}{4x^3 - 1} > 0 \right\} = \left] \sqrt[3]{1/4}, +\infty \right[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo**  $I \subset D$ , tal que  $1 \in I$ , ou seja:

$$I = \left] \sqrt[3]{1/4}, +\infty \right[$$

7. Encontre as soluções da equação  $y' \operatorname{sen} t + y \cos t = 1$  no intervalo  $]0, \pi[$ . Mostre que só há uma solução tal que  $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$  é finito e indique um problema de valor inicial que tenha essa solução.

**Resolução:**

É de notar que  $(\operatorname{sen} t)' = \cos t$  e, como tal, a equação pode ser escrita na forma

$$y' \operatorname{sen} t + y(\operatorname{sen} t)' = 1 \Leftrightarrow (y \operatorname{sen} t)' = 1 \Leftrightarrow y \operatorname{sen} t = t + C \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Dado que para  $t \in ]0, \pi[$  a função  $\operatorname{sen} t$  não se anula, resulta que a solução geral da equação (definida nesse intervalo) é dada por

$$y(t) = \frac{t + C}{\operatorname{sen} t},$$

com  $C \in \mathbb{R}$ . Como para  $C \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t} + C \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} = 1 + C \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} = 1 \pm \infty = \pm \infty$$

então o limite da solução quando  $t \rightarrow 0$  só é finito quando  $C = 0$ ; nesse caso,

$$y(t) = \frac{t}{\operatorname{sen} t} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} y(x) = 1.$$

A condição inicial a acrescentar a equação diferencial pode ser a seguinte:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

8. Obtenha a solução  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte equação:

$$y(t) = 1 + \int_1^t sy(s) ds. \tag{4}$$

**Resolução:**

Derivando ambos os membros da equação integral (4) em ordem a  $t$  e aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtém-se:

$$y'(t) = \left( \int_1^t sf(s) ds \right)' \Leftrightarrow y'(t) = ty(t)$$

Desta forma,  $y(t)$  é solução da equação linear homogênea

$$y' = ty \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = Ke^{\int t dt} = Ke^{\frac{t^2}{2}}$$

onde  $K \in \mathbb{R}$ . Atendendo a que, pela mesma equação (4),  $y(1) = 1$  tem-se que  $Ke^{1/2} = 1$ , ou seja,  $K = e^{-1/2}$ . Assim, a solução da equação integral é

$$y(t) = e^{\frac{t^2-1}{2}}$$

e está definida para  $t \in \mathbb{R}$ .