

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Propostos nº 1

Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

1. Diga qual das seguintes equações é uma equação linear

(a) $x - y' = xy$ (b) $y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

(a) $\frac{dy}{dt} = -ye^t$ (b) $y' = x^3 - 2xy$ (c) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$
(d) $t\frac{dy}{dt} + 2y = e^t, t > 0$ (e) $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{3x} \sin x$ (f) $\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t \cos t$

3. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

(a) $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, y(0) = 1$ (b) $\frac{dy}{dt} + y = \sin t, y(\pi) = 1$
(c) $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}, y(\pi) = 0, t > 0$ (d) $\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t \cos t, y(\pi) = 0$
(e) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases}$ tomando-se $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

4. No instante $t = 0$ a quantidade de um certo material radioativo armazenado é x_0 . A equação para $x(t)$, a quantidade de material radioativo é $\frac{dx}{dt} = -ax$, onde $a > 0$ é uma constante.

- (a) Encontre a solução $x(t)$
(b) Calcule a *meia-vida*, ou seja o tempo necessário para que a concentração inicial x_0 se reduza a metade. Note que a “meia-vida” não depende da concentração inicial.

5. Considere a equação diferencial

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

- (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.
- (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.
- (c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções contínuas e n é número real diferente de 0 e de 1. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, envolvendo equações de Bernoulli:

(a) $y' + \frac{y}{x} = x\sqrt{y}$, $y(1) = 1$

(b) $y' = 5y - \frac{4x}{y}$, $y(0) = -\frac{1}{5}$

7. Considere a equação de Riccati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{1}$$

- (a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Riccati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.
- (b) Determine a solução da equação (1).

8. (a) Mostre que a substituição $z = 1/P$ transforma a equação logística

$$P' = kP \left(1 - \frac{P}{M} \right)$$

na equação linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

- (b) Resolva a equação diferencial para obter uma expressão para $P(t)$,

1 Soluções de 1.2

- (a) sim; (b) não
- (a) $y(t) = ce^{-e^t}$ (b) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$ (c) $y(x) = 2x + ce^{-x}$
(d) $y(t) = \frac{e^t(t-1)+c}{t^2}$ (e) $y(x) = e^{3x}(c - \cos x)$ (f) $y(t) = (t^2 + ct) \cos t$
com $c \in \mathbb{R}$, em todas as alíneas.
- (a) $y(x) = 1$ (b) $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{\pi-t})$ (c) $y(t) = \frac{\sin t}{t^2}$
(d) $y(t) = (t^2 - \pi t) \cos t$
(e) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$
- (a) $x(t) = x_0e^{-at}$ (b) $T = \frac{\log 2}{a}$.
- (a) $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ ou $y(t) = -\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ (b) $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}}$ e $I_{\text{Max}} =]0, \infty[$
- (a) $y(x) = \left(\frac{x^2}{5} + \frac{4}{5\sqrt{x}}\right)^2$ (b) $y(x) = -\frac{\sqrt{20x+2-e^{10x}}}{5}$
- (a) $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2$ é equivalente à equação $\frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{2}{t} + 1\right)\psi = -\psi^2$
(b) $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}}{t^2 \left(\int \frac{e^{-t}}{t^2} dt + C \right)}$