Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 11

Equações Diferenciais Parciais

1 Exercícios Propostos

1. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},\ x \in (0,\pi),\quad \text{com} \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \ \text{sen}\,(x) - 2\ \text{sen}\,(5x). \end{cases}$$

2. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u,\ x \in (0,L),\quad \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

3. Resolva o seguinte problema de valores de fronteira e inicial para $0 < x < \pi$ e $t > 0$

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \text{sen}\,(x) + 3\text{sen}\,(3x) \end{cases}$$

4. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,\pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,\pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x\ .$$

5. Seja f a função definida no intervalo $]0,2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \; x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

6. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1, \; u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$$

7. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\cos t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 & t > 0, \\ u(t,\pi) = 0 & t > 0, \\ u(0,x) = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

8. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0 \;, \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é uma constante real positiva.

9. Considere o seguinte problema de valores na fronteira, para $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \;, \;\; u(x,1) = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1 & \text{se} \;\; 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos da função f no intervalo $[0,1]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (1).

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \quad x, y \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos\,(2\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos\,(2\pi y)$$

11. Seja a função f definida no intervalo $(0,\pi)$ por $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Determine a série de Fourier de cossenos da função f.

(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi,\pi]$.

(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in \,]0,\pi[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

12. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos\left(2\pi\,(x-y)\right) - \cos\left(2\pi\,(x+y)\right) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

2 Soluções

1. $e^{-\alpha^2 t}\text{sen}\,(x) - 2e^{-25\alpha^2 t}\text{sen}\,(5x)$

2. $e^{-\left(1+\frac{9\pi^2}{L^2}\right)t}\cos\frac{3\pi x}{L}$

3. $u(x,t) = \text{sen}\,(t)\text{sen}\,(x) + \text{sen}\,(3t)\text{sen}\,(3x)$

4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\, e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\left(1+(2n+1)^2\right)t}}{(2n+1)^3}\,\text{sen}\,((2n+1)x)$

5. (a) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$

(b) $\pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\, e^{-\frac{n^2 t+2t^2}{4}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$

6. (b) $u(x) = T_1 + \frac{T_2-T_1}{L}x$

(c) $20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\left(11-3(-1)^n\right)e^{-n^2\pi^2\alpha t}\text{sen}\,(n\pi x)$

7. $u(t,x) = e^{-\text{sen}\,t}\text{sen}\,(x) + e^{-4\text{sen}\,t}\text{sen}\,(2x)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c}\text{sen}\,(n\pi ct)\text{sen}\,(n\pi x)$

9. (a) $SF_{\cos}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n\pi}\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\,(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se}\quad 0\le x<1/2,\\ 0 & \text{se}\quad x=1/2\\ -1 & \text{se}\quad 1/2<x\le 1\end{cases}$

(b) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\,\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi\,\text{sh}\,n\pi}\cos\,(n\pi x)\text{sh}\,(n\pi y)$

10. $C + \frac{\text{ch}\,(2\pi x)\cos\,(2\pi y) + \text{ch}\,(2\pi y)\cos\,(2\pi x)}{2\pi\,\text{sh}\,(2\pi)},\ C\in\mathbb{R}$

11. (a) $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos\,(nx) = \frac{2}{\pi}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}\cos\,(2nx)\right)$

(b) $|\text{sen}\,x|$ (c) $\frac{2}{\pi}e^{2t} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(2-4n^2)t}}{4n^2-1}\cos\,(2nx)$

12. $u(x,y,t) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\,\text{sen}\,(2\pi x)\,\text{sen}\,(2\pi y)\,\text{sen}\,(2\sqrt{2}\pi t)$