Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 10

Séries de Fourier

1. Determine a série de Fourier da função $g(x) = |x|$, no intervalo $[-\pi, \pi]$. Utilize o resultado para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Resolução:

A função $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } \ x \in [-\pi, 0[\\ x & \text{se } \ x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Como $L = \pi$, a série de Fourier associada a f é da forma

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \text{sen}\, nx \right)$$

Dado que f é uma função par, então

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi$$

e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\text{sen}\, nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\, nx}{n}\, dx \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} \left(\cos n\pi - 1 \right) \qquad \text{e} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \text{sen}\, nx\, dx = 0.$$

Assim sendo, a série de Fourier de f é

$$SFf(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\cos nx$$

Mas, tendo em conta que

$$\cos n\pi - 1 = (-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n \text{ par} \\ -2 & \text{para} \quad n \text{ ímpar} \end{cases}$$

a série de Fourier reduz-se aos seus termos com índice par, ou seja:

$$SFf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\big((2k-1)x\big)$$

Com a extensão periódica de f a $\mathbb{R}$ é contínua e seccionalmente C^1, então pelo teorema da convergência pontual

$$SFf(x) = f(x) \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]. \tag{1}$$

Para calcular a soma da série numérica pretendida, usamos simplesmente a equação (1) no ponto $x = 0$:

$$0 = f(0) = SFf(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Resulta pois que:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^3 - \pi^2 x$, no intervalo $x \in [-\pi, \pi]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para calcular a soma da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$

Resolução:

A série de Fourier associada a h será

$$SFh(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\big).$$

Como h é uma função ímpar, a_0 e a_n, para $n \in \mathbb{N}$ são nulos. Tem-se também, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathsf{sen}\,nx\,dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^3-\pi^2 x\right)\mathsf{sen}\,nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left(x^3-\pi^2 x\right)\frac{-\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \int_0^{\pi}\left(3x^2-\pi^2\right)\frac{\cos nx}{n}\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(3x^2-\pi^2\right)\frac{\cos nx}{n}\,dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes, de novo:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left(3x^2-\pi^2\right)\frac{\mathsf{sen}\,nx}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \int_0^{\pi} 6x\,\frac{\mathsf{sen}\,nx}{n^2}\,dx\right) \\
&= \int_0^{\pi} 6x\,\frac{-\mathsf{sen}\,nx}{n^2}\,dx
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo mais uma integração por partes:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left(6x\,\frac{\cos nx}{n^3}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 6\,\frac{\cos nx}{n}\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{6\pi\cos n\pi}{n^3} - \underbrace{\frac{6\,\mathsf{sen}\,nx}{n^3}\Bigg|_0^{\pi}}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right) \\
&= \frac{12(-1)^n}{n^3}
\end{aligned}$$

Assim

$$SFh(x) = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\,\mathsf{sen}\,nx$$

Note que $h(x) = x(x^2-\pi^2) = x(x-\pi)(x+\pi)$ é de classe C^1 e verifica $h(-\pi) = h(\pi)$. Assim, pelo teorema da convergência pontual:

$$SFh(x) = h(x) \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]. \tag{2}$$

Para calcular a soma da série numérica dada, usamos a equação (2) no ponto $x = \frac{\pi}{2}$:

$$12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\,\mathsf{sen}\,\frac{n\pi}{2} \;=\; h\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\pi^2\right) \;=\; -\frac{3\pi^3}{8}. \tag{3}$$

Tendo em conta que, para $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\text{sen}\,\frac{n\pi}{2} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

então, eliminando os termos nulos (n par) da série (3) obtém-se

$$12\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^3}(-1)^k \;=\; -12\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \;=\; -\frac{3\pi^3}{8},$$

o que é equivalente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \;=\; \frac{\pi^3}{32}.$$

3. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,x & \text{se} \quad \text{sen}\,x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \text{sen}\,x \leqslant 0 \end{cases}$$

Resolução:

A função f pode ser escrita na forma

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \vdots & \\ 0 & \text{se} \quad x \in \left]-3\pi, -2\pi\right[\\ \text{sen}\,x & \text{se} \quad x \in [-2\pi, -\pi] \\ 0 & \text{se} \quad x \in \left]-\pi, 0\right[\\ \text{sen}\,x & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{se} \quad x \in \left]\pi, 2\pi\right[\\ \vdots & \end{cases} \;=\; \frac{1}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{1}{2}\,|\text{sen}\,x|$$

pelo que a função f é periódica de período 2π. Assim, a série de Fourier de f é

$$SFf(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + B_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{\pi}\Big) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos nx + B_n \text{sen}\,nx\Big)$$

Note que $\frac{1}{2}\text{sen}\,x$ já está na forma de uma série de Fourier com $L = \pi$. Assim, podemos simplesmente determinar a série de Fourier da função par $g(x) = \frac{1}{2}|\text{sen}\,x|$, pois

$$SFf(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\,x + SFg(x).$$

A série de Fourier da função g é

$$SFg(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos nx + b_n \text{sen}\, nx \Big)$$

em que (tendo em conta que g é par e $g(x) = \frac{1}{2}|\text{sen}\, x| = \frac{1}{2}\text{sen}\, x$ para $x \in]0, \pi[$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{sen}\, x \, dx = \frac{2}{\pi}.$$

e

$$b_n = 0, \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Para $n > 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{sen}\, x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Big(\text{sen}\,(x + nx) + \text{sen}\,(x - nx) \Big) \, dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$,

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}\, x \cos x \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}\, 2x \, dx = 0.$$

Assim

$$SFf(x) \;=\; SFg(x) + \frac{1}{2}\text{sen}\, x \;=\; \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2 - 1)} \cos(nx) \;+\; \frac{1}{2}\text{sen}\, x$$

Visto que

$$(-1)^{n+1} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n \text{ ímpar} \\ -2 & \text{para} \quad n \text{ par} \end{cases}$$

e que a função é contínua em $\mathbb{R}$, seccionalmente C^1 em $[-\pi, \pi]$ e periódica de período 2π, podemos concluir que

$$SFf(x) \;=\; \frac{1}{\pi} \;-\; \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx) \;+\; \frac{1}{2}\text{sen}\, x \;=\; f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

Resolução:

A série de senos associada a f é

$$S_{\text{sen}}\, f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\text{sen}\,(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 \text{sen}\,(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\Big(1-(-1)^n\Big)$$

A série de senos de f em $[0,1]$ é, de facto, a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-1,1]$; trata-se, pois, da série de Fourier da função

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in [-1,0[\\ 1 & \text{se} \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

pelo que, usando o teorema da convergência pontual,

$$\begin{aligned} S_{\text{sen}}\, f(x) \;&=\; SFg(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi}\,\text{sen}\,(n\pi x) \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\,\text{sen}\,\big((2k-1)\pi x\big) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in\,]0,1[\\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quanto à convergência em $\mathbb{R}$, a série converge para a extensão periódica de g em todos os pontos onde g é contínua, ou seja, em todos os $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Dado que os limites laterais de g nos seus pontos de descontinuidade são ± 1, então $SFf(x) = 0$ para $x \in \mathbb{Z}$. Desta forma:

$$S_{\text{sen}}\, f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } \; 2k-1 < x < 2k \; \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } \; 2k < x < 2k+1 \; \text{ para } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } \; x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

5. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:
   (a) a série de Fourier associada a f;
   (b) a série de senos associada a f;
   (c) a série de cosenos associada a f.

Resolução:

(a) Considere-se a função $f(x)$ extendida periodicamente a $\mathbb{R}$. Então o seu período é 1 e $L = \frac{1}{2}$. Note que um intervalo simétrico em torno da origem correspondente a um período da função é, precisamente, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ — pois tem comprimento 1.

Desta forma, a esta função (como vimos, periódica com $L = \frac{1}{2}$) está associada a série de Fourier

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(2n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(2n\pi x)\Big)$$

Devido à periodicidade de f, os integrais abaixo têm o mesmo valor ao longo de qualquer intervalo de comprimento 1:

$$a_0 = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = 2 \int_0^1 f(x)\, dx = 2 \int_0^1 x\, dx = 1$$

Identicamente, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos(2n\pi x)\, dx = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2n\pi x)\, dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \operatorname{sen}(2n\pi x)\, dx = 2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(2n\pi x)\, dx$$

Calculando estes coeficientes, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos(2n\pi x)\, dx \\ &= 2\Big(\frac{x}{2n\pi} \operatorname{sen}(2\pi n x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi n x)\, dx\Big) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(2n\pi x)\, dx \\ &= 2\Big(-\frac{x}{2n\pi} \cos(2\pi n x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2n\pi} \int_0^1 \cos(2\pi n x)\, dx\Big) \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(2\pi n) = -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Temos então que, para $x \in [0, 1]$

$$SFf(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi x).$$

Dado que $f(x)$ é contínua em $[0, 1]$, podemos concluir que

$$SFf(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \,]0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de senos de f é a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-1,1]$. Diferentemente da alínea (a), trata-se da série de Fourier de uma função com período 2 (ou seja, com $L=1$).

A série de senos associada a f é, pois

$$S_{\text{sen}} f(x) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\text{sen}\,(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\text{sen}\,(n\pi x)\,dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

(c) A série de cosenos de f é a série de Fourier da extensão par de f ao intervalo $[-1,1]$. Tal como na alínea (b) (e, também, diferentemente da alínea (a)) trata-se da série de Fourier de uma função com período 2 (ou seja, com $L=1$).

A série de cosenos associada a f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\,(n\pi x)$$

onde

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos\,(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos\,(n\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1)$$

6. Determinar a série de senos de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado. Indique a sua soma no conjunto indicado.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < a \\ a & \text{se} \quad a \leq x \leq 2a \end{cases}$ para $x \in [0, 2a]$.

(b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{se} \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$ para $x \in [0, 1]$.

Resolução:

(a) A série de senos de f em $[0, 2a]$ é dada por

$$S_{\mathsf{sen}}\, f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathsf{sen}\, \left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2a}\int_0^{2a} f(x)\,\mathsf{sen}\,\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) dx \;=\; \frac{1}{a}\int_a^{2a} a\,\mathsf{sen}\,\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) dx \\ &= -\frac{2a}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)\Bigg|_a^{2a} \;=\; \frac{2a}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right). \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$S_{\mathsf{sen}}\, f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right) \mathsf{sen}\,\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

A série de senos de f é a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2a, 2a]$, ou seja, da função

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} -a & \text{se} \quad -2a \le x < -a \\ 0 & \text{se} \quad -a \le x \le a \\ a & \text{se} \quad a < x \le 2a. \end{cases}$$

Atendendo aos pontos de continuidade (e descontinuidade) de $\hat{f}$

$$SF\hat{f}(x) = \begin{cases} -a & \text{se} \quad -2a < x < -a \\ -\frac{a}{2} & \text{se} \quad x = -a \\ 0 & \text{se} \quad -a < x < a \\ \frac{a}{2} & \text{se} \quad x = a \\ a & \text{se} \quad a < x < 2a \\ 0 & \text{se} \quad x = \pm 2a \end{cases}$$

Finalmente, para $x \in [0, 2a]$,

$$S_{\mathsf{sen}}\, f(x) \;=\; SF\hat{f}(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x < a \\ \frac{a}{2} & \text{se} \quad x = a \\ a & \text{se} \quad a < x < 2a \\ 0 & \text{se} \quad x = 2a \end{cases}$$

(b) A série de senos de g em $[0, 1]$ é dada por

$$S_{\mathsf{sen}}\, g(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathsf{sen}\,(n\pi x)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \;=\; 2\int_0^1 g(x)\text{sen}\,(n\pi x)dx \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\text{sen}\,(n\pi x)dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\text{sen}\,(n\pi x)dx$$

Primitivando por partes, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\text{sen}\,(n\pi x)\,dx &= -\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(n\pi x)dx \\
&= -\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\,\text{sen}\,(n\pi x)\,dx &= -\frac{1-x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{1/2}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{1/2}^1\cos(n\pi x)dx \\
&= \frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}$$

Então

$$b_n \;=\; \frac{4}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}$$

e a série pedida é

$$S_{\text{sen}}\,g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\,\text{sen}\,(n\pi x)$$

A série de senos de g no intervalo $[0,1]$ é a série de Fourier da extensão ímpar de g ao intervalo $[-1,1]$, isto é, a série de Fourier de

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} -1-x & \text{se} \quad -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ x & \text{se} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{se} \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Atendendo a que esta função é contínua e que $\hat{g}(-1) = \hat{g}(1)$, tem-se em particular que

$$S_{\text{sen}}\,g(x) = g(x), \qquad \forall x \in [0,1]$$

Consideramos agora a extensão periódica, $\bar{g}$, de $\hat{g}$ a $\mathbb{R}$. A função $\hat{g}$ é contínua em $\mathbb{R}$ pois, como vimos, $\hat{g}$ é contínua e $\hat{g}(-1) = \hat{g}(1)$. Além disso, $\hat{g}$ é seccionalmente C^1. Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$S_{\text{sen}}\,g(x) = \bar{g}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Determinar a série de cossenos de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado. Indique as respectivas somas nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ para $x \in [0, 2]$.

(b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \le x < 1/2 \\ 1 - x & \text{se} \quad 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$ para $x \in [0, 1]$.

Resolução:

(a) A série de cossenos de $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{\cos} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

em que

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_1^2 dx = 1$$

e, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$S_{\cos} f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

A série de cossenos de f no intervalo $[0, 2]$ é a série de Fourier da extensão par de f ao intervalo $[-2, 2]$, isto é, a série de Fourier de

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -2 \le x < -1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Atendendo aos pontos de continuidade (e descontinuidade) de f_p, e tendo em conta que $f_p(-2) = f_p(2)$ (e isto acontece sempre com qualquer extensão par) então:

$$SF f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -2 \le x < -1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

Finalmente, para $x \in [0,2]$,

$$S_{\cos} f(x) \;=\; SF f_p(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de cossenos de $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{\cos} g(x) \;=\; \frac{a_0}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

em que

$$a_0 \;=\; 2\int_0^1 g(x)\,dx \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx \;+\; 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)dx \;=\; \frac{1}{2}$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \;=\; 2\int_0^1 g(x)\cos(n\pi x)\,dx \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(n\pi x)dx \;+\; 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\cos(n\pi x)dx$$

Primitivando por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(n\pi x)dx \;&=\; \frac{x}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} \;-\; \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(n\pi x)dx \\ &=\; \frac{1}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \;+\; \frac{1}{n^2\pi^2}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\Big) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\cos(n\pi x)dx \;&=\; \frac{1-x}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \;+\; \frac{1}{n\pi}\int_{1/2}^1 \operatorname{sen}(n\pi x)dx \\ &=\; -\frac{1}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \;-\; \frac{1}{n^2\pi^2}\Big(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\Big) \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$a_n \;=\; \frac{2}{n^2\pi^2}\Big(2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\Big)$$

e a série de cossenos de g é

$$S_{\cos} g(x) \;=\; \frac{1}{4} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\Big(2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\Big)\cos(n\pi x).$$

A série de cossenos de g no intervalo $[0,2]$ é a série de Fourier da extensão par de g ao intervalo $[-2,2]$, isto é, a série de Fourier de

$$g_p(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad |x| \le \frac{1}{2} \\ 1 - |x| & \text{se} \quad \frac{1}{2} < |x| \le 1 \end{cases}$$

Atendendo a que esta função é contínua e que $g_p(-1) = g_p(1)$, tem-se que

$$S_{\cos} f(x) = f(x) \qquad \forall x \in [0,1].$$