TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2022/2023

Curso: LEQ, LEAmb, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 10

Introdução à Separação de Variáveis e Séries de Fourier

1 Exercícios Propostos

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida em pontos adequados, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

4. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ por

$$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-\pi, \pi]$.

5. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-2, 2]$.

6. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

7. Determine a série de cosenos da função $r(x) = x$ no intervalo $[0, \pi]$, indicando a soma da série em $\mathbb{R}$.

8. Considere a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Esboçe o gráfico da extensão par de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de cosenos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série em $[0, 2]$.

(b) Esboçe o gráfico da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de senos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série em $[0, 2]$.

9. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais:

a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

b) $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } \ x \in \,]0, 1[\\ u(0, t) = 0 & \text{se } \ t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{se } \ t > 0 \end{cases}$$

Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = \operatorname{sen}(2\pi x) - 3 \operatorname{sen}(4\pi x).$$

11. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ x \in \,]-1, 1[\,, \text{ com } \begin{cases} u(-1, t) = u(1, t) \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = 3 \cos(\pi x) - 4 \ \operatorname{sen}(5\pi x). \end{cases}$$

2 Soluções

1. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\text{sen}\,((2n+1)\pi x)}{2n+1}$

2. $\frac{L}{2}+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=0$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3. $\frac{L^2}{3}+\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=L$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;
fazendo $x=0$, obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

4. $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\,(nx)\right]=\begin{cases} j(x) & \text{se} \quad -\pi<x<\pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x=\pm\pi \end{cases}$

5. $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\right]=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2\leq x<0 \\ 1 & \text{se} \quad 0\leq x<1 \\ 0 & \text{se} \quad 1<x\leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=0 \ \text{ou} \ x=1 \end{cases}$

6. $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,\text{sen}\left((2n-1)\pi x\right)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \ \text{ou} \ x=1 \end{cases}$

7. $SF_{\cos}r(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos\left((2n-1)x\right)=$
$=\begin{cases} x-2k\pi & \text{se} \quad 2k\pi\leq x\leq(2k+1)\pi \\ 2k\pi-x & \text{se} \quad (2k-1)\pi<x<2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathbb{Z}$.

8. (a) $SF_{\cos}f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}(1-\cos\frac{n\pi}{2})-\frac{2}{n\pi}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right]\cos\frac{n\pi x}{2}=$
$=\begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0\leq x<1 \\ 1 & \text{se} \quad 1<x\leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=1 \end{cases}.$

(b) $SF_{\text{sen}}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n+\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right]\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}=$
$=\begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 1 & \text{se} \quad 1<x<2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=1 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \ \text{ou} \ x=2 \end{cases}.$

9. (a) $\lambda=n^2\pi^2$, para $n\in\mathbb{Z}^+$

(b) $\lambda=n^2$, para $n\in\mathbb{Z}_0^+$

10. $u(x,t)=e^t\left(e^{-4\pi^2t}\,\text{sen}(2\pi x)-3e^{-16\pi^2t}\,\text{sen}(4\pi x)\right)$

11. $u(x,t)=3\,e^{-\alpha^2\pi^2t}\cos(\pi x)-4\,e^{-\alpha^2 25\pi^2t}\,\text{sen}(5\pi x)$