Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Curso: LEIC-A

Teste 3 (Versão B)— Resolução

4 de Janeiro de 2024, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Sendo F o campo vectorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = (z,\ 1-x,\ y^2)\ ,$$

verifique que é um campo rotacional em $\mathbb{R}^3$, e calcule um potencial vectorial associado.

Resolução:

Dado que,F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ se tem $\operatorname{div} F = 0$ o campo F é rotacional em $\mathbb{R}^3$, isto é, existe $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $F = \operatorname{rot} G$. Para calcular um potencial vectorial G, vamos considerar $G=(P,Q,R)$ e começamos por escolher $R=0$. Tem-se então que

$$(z,\ 1-x,\ y^2) = \operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Usando a primeira igualdae

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = z \quad \Leftrightarrow \quad Q(x,y,z) = -\frac{z^2}{2} + C_1(x,y)$$

Por outro lado, usando a segunda igualdae

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 1-x \quad \Leftrightarrow \quad P(x,y,z) = (1-x)z + C_2(x,y)$$

Finalmente, usando a terceira igualdae e escolhendo $C_1(x,y)=0$ tem-se que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 - \frac{\partial C_2}{\partial y} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2(x,y) = -\frac{y^3}{3} + C(x)$$

Então, escolhendo $C(x)=0$, tem-se que um potencial vectorial associado a F é (por exemplo)

$$G(x,y,z) = \left((1-x)z - \frac{y^3}{3}, -\frac{z^2}{2}.0\right)$$

Deixo ao critério do aluno confirmar que, efectivamente se tem

$$\operatorname{rot}\left((1-x)z - \frac{y^3}{3}, -\frac{z^2}{2}.0\right) = (z,\ 1-x,\ y^2)$$

2. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = \left(y,\ -x,\ yx^3\right)\ .$$

(a) Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de F através da superfície

$$S = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = 4\ ,\ z>0\}$$

na direção da normal $\overrightarrow{\nu}$ com terceira componente positiva.

Resolução:

Visto

- S é uma superfície orientável, elementar;
- F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

podemos aplicar o Teorema de Stokes para concluir que

$$\text{Flixo}(\operatorname{rot} F, S, \overrightarrow{\nu}) = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS = \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

O bordo de S é uma curva de Jordan, caracterizado por

$$\partial S = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = 4\ ,\ z=0\} = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2 = 4\ ,\ z=0\}$$

percorrida em sentido directo quando vista do poto $(0,0,100)$ (de forma a que a orientação seja compatível com a normal considerada). Tem-se então que uma para metrização de ∂S é

$$\gamma(\theta) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 0) \quad , \quad \theta \in]0,2\pi[$$

Assim

$$\text{Flixo}(\operatorname{rot} F, S, \overrightarrow{\nu}) = \int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen}\theta,\ -2\cos\theta,\ 16\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta,\ 2cos\theta,\ 0)\, d\theta = -8\pi$$

(b) Calcule o fluxo do rotacional do campo F através da superfície S_1 parametrizada por

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho\operatorname{sen}\theta,\ \rho(\rho-2)) \quad , \quad 0<\rho<2\ ,\ 0<\theta<2\pi$$

na direção da normal induzida por g.

Sugestão: Começe por determinar o bordo de S_1.

Resolução:

Uma parametrização do bordo de S_1, ∂S_1, pode ser dada pela imagem por g da fronteira do domínio de g. Sendo que o domínio de g é

$$D = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0<\theta<2\pi\ \wedge\ 0<\rho<2\right\}$$

então

$$\gamma_1(\theta) = g(2,\theta) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0), \qquad \theta \in [0,2\pi].$$

Ou seja, ∂S_1 coincide com ∂S da alínea anterior. Como tal, por aplicação do Teorema de Stokes

$$\text{Flixo}(\operatorname{rot} F, S_1, \overrightarrow{\nu}_1) = \iint_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}_1\, dS = \oint_{\partial S_1} F \cdot d\gamma = \pm \oint_{\partial S} F \cdot \gamma = \pm 8\pi$$

onde o sinal é escolhido de acordo com a oruentação de γ_1. Dado que a normal considerada é a normal induzida pela parametrização, tem-se que

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2\rho-2 \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \big(-\rho(2\rho-2)\cos\theta, -\rho(2\rho-2)\operatorname{sen}\theta, \rho\big)$$

Sendo a terceira componente positiva, a orientação de ∂S_1 é a mesma de ∂S, e assim

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot \nu\, dS = -8\pi.$$

3. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

   (a) Calcule a série Fourier de $f(x)$.

   Resolução:

   Sendo $L = \pi$, a série de Fourier de f tem a forma:

$$SF\, f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \Big).$$

   Tendo em conta que f é nula no intervalo $[0, \pi]$, os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\,dx \;=\; 2,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\cos(nx)\,dx = 0,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\operatorname{sen}(nx)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi}\,\Big(-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big)\Big|_{x=-\pi}^{0}\\
&= -\frac{2}{n\pi}\big(1-\cos n\pi\big) \;=\; \frac{2}{n\pi}\big((-1)^n-1\big).
\end{aligned}$$

   Resulta então que

$$SF\, f(x) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\big((-1)^n - 1\big)\operatorname{sen}(nx).$$

   (b) Indique, justificando. quais os pontos do intervalo $[-\pi, \pi]$ para os quais

$$SF_f(x) \neq f(x)$$

   Resolução:

   Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$SF\, f(x) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \in\,]-\pi, 0[\\ 0 & \text{se} \quad x \in\,]0, \pi[\\ 1 & \text{se} \quad x = -\pi \vee x = 0 \vee x = \pi. \end{cases}$$

   pelo que no intervalo $[-\pi, \pi]$

$$SF_f(x) \neq f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\pi,\, 0,\, \pi\}$$

4. Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{u}{16} & \text{para todo} \quad x \in]0, 2\pi[\,, \quad t > 0 \\ u(t, 0) = 0\,, \quad u(t, 2\pi) = M & \text{para todo} \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

sendo J uma constante real.

(a) Para $M = 0$, use o método de separação de variáveis para determinar a solução do problema (1) que verifica a condição inicial

$$u(0,x) = \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4\operatorname{sen}(2x)$$

para $x \in [0, 2\pi]$

Resolução:

Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira para $M = 0$, são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, para $0 \le x \le \pi$ e $t \ge 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + \frac{1}{16}T(t)X(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{1}{16} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, que dependem de variáveis diferentes x e t, forem ambas iguais a uma constante, digamos λ. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0. \\ T'(t) = \left(\lambda + \dfrac{1}{16}\right)T(t). \end{cases}$$

As condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0$ para as soluções da forma $T(t)X(x)$ não nulas dizem que

$$T(t)X(0) = T(t)X(2\pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Temos então que as funções $X(x)$ e $T(t)$ são, respectivamente, soluções de

$$(\mathbf{P1}) \ \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(9) = X(2\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad (\mathbf{P2}) \ T'(t) = \left(\lambda + \frac{1}{16}\right)T(t)$$

(P1) é um problema de valores próprios para $X'' - \lambda X = 0$ com condições de fronteira de Dirichlet $X(0) = X(2\pi) = 0$, pelo que, para cada n, os valores próprios são $-\dfrac{n^2}{4}$ associados às soluções $\operatorname{sen}\dfrac{nx}{2}$.

Por outro lado resolvendo **(P2)** para os casos em que λ é valor próprio de **(P1)**,

$$\frac{T'}{T} = -\frac{n^2}{4} + \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad (\ln T)' = -\frac{n^2}{4} + \frac{1}{16} \quad \Leftrightarrow \quad T = e^{(-\frac{n^2}{4} + \frac{1}{16})t}$$

Finalmente,para cada valor de n

$$u_n(t,x) = e^{(-\frac{n^2}{4} + \frac{1}{16})}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}$$

é solução da equaçãodiferencial e verifica as condições de fronteira, pelo que a solução geral do problema é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\left(-\frac{n^2}{4} + \frac{1}{16}\right)}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}$$

Para calcular as constantes (c_n), $n\mathbb{N}$, usamos a condição inicial:

$$u(0,x) = \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4\ \operatorname{sen}(2x)$$

Assim

$$\operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4\ \operatorname{sen}(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{nx}{2}$$

para todo $x \in [0.\pi]$. Pelo que os coeficientes c_n são:

$$c_3 = 1, \qquad c_4 = -4. \qquad c_n = 0 \text{se} n \in \mathbb{N} \setminus \{3,4\}.$$

Desta forma, a solução é

$$u(t,x) = e^{-\frac{27}{4}t} \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4e^{-\frac{63}{16}t} \operatorname{sen} 2x.$$

(b) (2 val.) No caso em que $M = -1$, determine uma solução estacionária do problema (1).

Resolução:

Uma solução estacionária do problema (1) é uma função da forma $u(t,x) = v(x)$. Assim $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$ e $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v''(x)$. Como $M = -1$, v é solução do problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} v'' + \dfrac{1}{16} v = 0 \\ v(0) = 0, \quad v(2\pi) = -1 \end{cases}$$

O polinómio característico da equação diferencial é $P(r) = r^2 + \dfrac{1}{16}$, pelo que

$$v(x) = A\cos\frac{x}{4} + B \operatorname{sen}\frac{x}{4}$$

Como $v(0) = 0$, $A = 0$. Por outro lado $V(2\pi) = -1$, pelo que $B \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = -1$, ou seja, $B = -1$. Assim, uma solução estacionária do problema (1) é

$$v(x) = -\operatorname{sen}\frac{x}{4}$$