DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Curso: LEIC-A

Teste 3 (Versão B)— Resolução

4 de Janeiro de 2024, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Sendo F o campo vectorial em $\mathbb{R}^3$ definido por
$$F(x,y,z) = (z,\ 1-x,\ y^2)\ ,$$
verifique que é um campo rotacional em $\mathbb{R}^3$, e calcule um potencial vectorial associado.

Resolução:

Dado que, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se tem $\operatorname{div} F = 0$ o campo F é rotacional em $\mathbb{R}^3$, isto é, existe $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F = \operatorname{rot} G$. Para calcular um potencial vectorial G, vamos considerar $G = (P, Q, R)$ e começamos por escolher $R = 0$. Tem-se então que
$$(z,\ 1-x,\ y^2) = \operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$
Usando a primeira igualdae
$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = z \quad \Leftrightarrow \quad Q(x,y,z) = -\frac{z^2}{2} + C_1(x,y)$$
Por outro lado, usando a segunda igualdae
$$\frac{\partial P}{\partial z} = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad P(x,y,z) = (1-x)z + C_2(x,y)$$
Finalmente, usando a terceira igualdae e escolhendo $C_1(x,y) = 0$ tem-se que
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 - \frac{\partial C_2}{\partial y} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad C_2(x,y) = -\frac{y^3}{3} + C$$
Então, escolhendo $C = 0$, tem-se que um potencial vectorial associado a F é (por exemplo)
$$G(x,y,z) = \left((1-x)z - \frac{y^3}{3}, -\frac{z^2}{2}. 0 \right)$$
Deixo ao critério do aluno confirmar que, efectivamente se tem
$$\operatorname{rot} \left((1-x)z - \frac{y^3}{3}, -\frac{z^2}{2}. 0 \right) = (z,\ 1-x,\ y^2)$$

2. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = \left(y,\ -x,\ yx^3\right)\ .$$

(a) Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de F através da superfície

$$S = \{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = 4\ ,\ z > 0\}$$

na direção da normal $\overrightarrow{v}$ com terceira componente positiva.

Resolução:

Visto

- S é uma superfície orientável, elementar;
- F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

podemos aplicar o Teorema de Stokes para concluir que

$$\text{Flixo}(\operatorname{rot} F, S, \overrightarrow{v}) = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{v}\, dS = \oint_{\partial S} F \cdot dg$$

(b) (1 val.) Calcule o fluxo do rotacional do campo F através da superfície S_1 parametrizada por

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho\operatorname{sen}\theta,\ \rho(\rho-2)) \quad , \quad 0 < \rho < 2\ ,\ 0 < \theta < 2\pi$$

na direção da normal da normal induzida por g.

Sugestão: Começe por determinar o bordo de S_1.

3. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(a) (3 val.) Calcule a série Fourier de $f(x)$.

(b) (1 val.) Indique, justificando. quais os pontos do intervalo $[-\pi, \pi]$ para os quais

$$SF_f(x) \neq f(x)$$

4. Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{u}{16} & \text{para todo} \quad x \in]0, 2\pi[\,, \quad t > 0 \\ u(t, 0) = 0\,, \quad u(t, 2\pi) = M & \text{para todo} \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

sendo J uma constante real.

(a) (4 val.) Para $M = 0$, use o método de separação de variáveis para determinar a solução do problema (1) que verifica a condição inicial

$$u(0, x) = \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - 4 \operatorname{sen}(2x)$$

para $x \in [0, 2\pi]$

(b) (2 val.) No caso em que $M = -1$, determine uma solução estacionária do problema (1).