DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:______________

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Curso: LEIC-A

TESTE 3 (VERSÃO A)

4 DE JANEIRO DE 2024, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- O teste deve ser resolvido a **caneta** (azul ou preta).

PERGUNTA	COTAÇÃO	CLASSIFICACAÇÃO
1	5	
2	5	
3	4	
4	6	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ____________ Curso: ____________ Sala: ____________

1. (5 val.) Sendo F o campo vectorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (1 - y,\ z^2,\ e^y)\ ,$$

verifique que é um campo rotacional em $\mathbb{R}^3$, e calcule um potencial vectorial associado.

2. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = \left(-y,\ x,\ x^3 y\right)\ .$$

(a) (4 val.) Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de F através da superfície

$$S = \{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\ ,\ z > 0\}$$

na direção da normal $\overrightarrow{\nu}$ com terceira componente positiva.

(b) (1 val.) Calcule o fluxo do rotacional do campo F através da superfície S_1 parametrizada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta,\ \rho \operatorname{sen} \theta,\ \rho(\rho - 3)) \quad , \quad 0 < \rho < 3\ ,\ 0 < \theta < 2\pi$$

na direção da normal induzida por g.

Sugestão: Começe por determinar o bordo de S_1.

3. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(a) (3 val.) Calcule a série de Fourier de $f(x)$ em $[-\pi, \pi]$.

(b) (1 val.) Indique, justificando, quais os pontos do intervalo $[-\pi, \pi]$ para os quais

$$SF_f(x) \neq f(x)$$

4. Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{u}{4} & \text{para todo} \quad x \in]0,\pi[\,, \quad t > 0 \\ u(t,0) = 0\,, \quad u(t,\pi) = B & \text{para todo} \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

sendo B uma constante real.

(a) (4 val.) Para $B = 0$, use o método de separação de variáveis para determinar a solução do problema (1) que verifica a condição inicial

$$u(0,x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x) - 4\operatorname{sen}(5x)$$

para $x \in [0,\pi]$

(b) (2 val.) No caso em que $B = 2$, determine uma solução estacionária do problema (1).