

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEIC-A, LEMat, LEQ

TESTE 3 (VERSÃO B)

7 DE JANEIRO DE 2026, 20H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (e^x - 2x^2y, e^{-y} + 2xy^2, xyz)$.

(a) (1 val.) Calcule o rotacional de F .

(b) (4 val.) Use (obrigatoriamente) o teorema de Stokes para calcular

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

onde γ é a curva $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$, percorrida em sentido positivo quando observada do ponto $(0, 0, 10)$.

(c) (2 val.) Determine, justificando

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS,$$

onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 1 = -\sqrt{x^2 + y^2}, z > 0\}$ orientada pela normal unitária com terceira componente positiva.

2. (7 val.) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{4}, t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \frac{\pi}{4}) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(0, x) = 8 \sin(4x) - 4 \sin(8x) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

3. Considere a função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \pi|x|$.

(a) (4 val.) Determine a série de Fourier de $f(x)$ e estude-a quanto à convergência pontual em $[-1, 1]$.

(b) (2 val.) Utilizando o resultado anterior, calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$