

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEIC-A, LEMat, LEQ

TESTE 3 (VERSÃO A)

7 DE JANEIRO DE 2026, 20H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(\sin x - \frac{y^3}{3}, \cos y + \frac{x^3}{3}, xyz \right)$.

(a) (1 val.) Calcule o rotacional de F .

Resolução:

Como F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então $\text{rot } F$ está bem definido em $\mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin x - \frac{y^3}{3} & \cos y + \frac{x^3}{3} & xyz \end{vmatrix} \\ &= (xz, -yz, x^2 + y^2) \end{aligned}$$

(b) (4 val.) Use (obrigatoriamente) o teorema de Stokes para calcular

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

onde γ é a curva $x^2 + y^2 = 4$ no plano $z = 0$, percorrida em sentido negativo quando observada do ponto $(0, 0, 10)$.

Resolução

(a) Uma superfície S_0 , cujo bordo é a circunferência dada pode ser

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 < 4\}.$$

Note que qualquer superfície cujo bordo é γ serve. Escolhemos a mais simples possível: a que está contida no plano coordenado $z = 0$. A sua parametrização pode ser:

$$g(x, y) = (x, y, 0), \quad \text{definida em } T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}.$$

A normal unitária induzida por g é $\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$, à qual corresponde o sentido positivo da circunferência; como o caminho pedido tem o sentido oposto, escolhemos $(0, 0, -1)$ (se tem dúvidas, faça uma figura).

Finalmente, temos que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S é uma superfície regular. O teorema de Stokes garante-nos que o trabalho pedido é dado por:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\partial S_0} F \cdot d\gamma = \iint_{S_0} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

Usando a alínea (a), resulta então que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\gamma &= \iint_T \operatorname{rot} F(g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_T \operatorname{rot} F(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy \\ &= \iint_T (0, 0, x^2 + y^2) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \iint_T -(x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, então com

$$\tilde{T} = \{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \},$$

o integral anterior fica:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot d\gamma &= \iint_{\tilde{T}} -r^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 -r^3 dr \right) d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 r^3 dr \\ &= -2\pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 = -2\pi \frac{16}{4} = -8\pi. \end{aligned}$$

(c) (2 val.) Determine, justificando

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS,$$

onde $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2 = -\sqrt{x^2 + y^2}, z > 0 \}$ orientada pela normal unitária com terceira componente negativa.

Resolução

Começamos por notar que a superfície é o cone $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z > 0$, cujo bordo está na intersecção de $z = 0$ com $z - 2 = -\sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja:

$$-\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad (\text{em } z = 0).$$

Trata-se do caminho, γ da alínea (b); note-se que o sentido de γ é compatível com a orientação de S (deve fazer uma figura). Pelo teorema de Stokes (aplicado a S) e alínea (b):

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_{\gamma} F \cdot d\gamma = -8\pi.$$

2. (7 val.) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \frac{\pi}{2}) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(0, x) = 4 \sin(2x) - 2 \sin(4x) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Resolução:

Começamos por resolver o problema de valores de fronteira

$$u_t = 4u_{xx} \quad \text{e} \quad u(t, x) = u(t, \frac{\pi}{2}) \quad \text{com } x \in]0, \frac{\pi}{2}[, t > 0,$$

(um problema de Dirichlet homogêneo) pelo método de separação de variáveis; para tal, vamos procurar soluções não nulas da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$T'(t)X(x) = 4T(t)X''(x) \quad \text{ou seja} \quad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X},$$

válida para qualquer $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e $t > 0$. Como o primeiro membro da igualdade depende apenas de t , enquanto o segundo membro depende apenas de x , para que a última igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, ambos os membros da mesma têm que ser constantes. Assim sendo, para certos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{T'}{4T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u(t, 0) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não deve ser a função nula.

$$u(t, 0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u(t, \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

e

$$T' = 4\lambda T \quad \text{se } t > 0. \quad (2)$$

O problema (1) é um problema de valores próprios para a equação $X'' - \lambda X = 0$ com condições de fronteira de Dirichlet $X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0$. Assim, os valores próprios são $-4n^2$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$), associados às soluções $X_n(x) = \sin(2nx)$.

Podemos agora resolver (2), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente, pois para outros valores de λ a solução de (1) é a solução nula, que não nos interessa. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, e a menos de combinação linear

$$T'(t) = -8n^2 T \Rightarrow T_n(t) = e^{-8n^2 t}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-8n^2 t} \sin(2nx)$$

Consequentemente qualquer combinação linear também o será, ou seja

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-8n^2 t} \operatorname{sen}(2nx)$$

Para calcular as constantes A_n com $n = 1, 2, \dots$ utilizamos a condição inicial:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2nx) &= A_1 \operatorname{sen}(2x) + A_2 \operatorname{sen}(4x) + A_3 \operatorname{sen}(6x) + \dots \\ &= u(0, x) = 4 \operatorname{sen}(2x) - 2 \operatorname{sen}(4x) \end{aligned}$$

Assim

$$A_1 = 4, \quad A_2 = -2 \quad \text{e} \quad A_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

Finalmente, a solução do problema de valores iniciais e de fronteira é

$$u(t, x) = 4e^{-8t} \operatorname{sen}(2x) - 2e^{-32t} \operatorname{sen}(4x).$$

3. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

(a) (4 val.) Determine a série de Fourier de $f(x)$ e estude-a quanto à convergência pontual em $[-\pi, \pi]$.

Resolução:

(a) Como f é uma função par, a série de Fourier é uma série de cossenos:

$$SF f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\pi} = \pi.$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier de f é

$$SF f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nx)$$

Para determinar a soma da série, notamos que f é contínua no seu domínio e $f(-\pi) = |-\pi| = \pi = f(\pi)$. Além disso, f é seccionalmente C^1 . Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$SF f(x) = |x| \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(b) (2 val.) Utilizando o resultado anterior, calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Resolução:

Pelo resultado anterior aplicado ao ponto $x = 0$, $SFf(0) = 0$, ou seja:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = 0.$$

Tendo em conta que

$$\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{(2k-1)^2} & \text{se } n = 2k - 1 \text{ (com } k \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{se } n = 2k \text{ (com } k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

resulta que

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 0.$$

Concluimos pois que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$