DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:______________

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Cursos: LEIC-A

TESTE 2 (VERSÃO B)

30 DE NOVEMBRO DE 2023, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- O teste deve ser resolvido a **caneta** (azul ou preta).

PERGUNTA	COTAÇÃO	CLASSIFICACAÇÃO
1	5	
2	5	
3	6	
4	4	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ______________ Curso: ______________ Sala: ______________

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) \;=\; \left(x^2 + y^2,\; y^2 + z^2\;, z^2 + x^2\right)\;.$$

   (a) (2 val.) Calcule $\operatorname{rot} F$.

   (b) (3 val.) Calcule a divergência do campo vectorial

$$G(x, y, z) \;\;=\;\; F(x, y, z) \;+\; \operatorname{rot} F(x, y, z)$$

2. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \ : \ z = 1 - x \ \ , x^2 + y^2 < 1\}$$

(a) (1 val.) Escreva uma parametrização para S.

(b) (2 val.) Calcule um vector unitário normal à superfície num ponto arbitrário da mesma.

(c) (2 val.) Calcule a área de S

3. Seja F o campo vectorial dado por

$$F(x,y,z) = (3xy + \text{sen}(y^2+z^2)\,,\; xz\,,\; 3yz + \cos(x^2+y^2))$$

(a) (2 val.) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através da superfície que é a fronteira do sólido

$$V = \{(x,y,z)\;: x^2+z^2 < y < 2\}$$

na direção da normal exterior a V.

(b) (4 val.) Calcule o fluxo de F através da superfície

$$S\{(x,y,z)\;:\; x^2+z^2 = y\;,\; y < 2\}$$

na direcção da normal a S com segunda componente negativa.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = (1 + y^2) f(ty) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) (1 val.) Mostre que este problema tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$.

(b) (3 val.) Suponha que, adicionalmente, f satisfaz $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.