DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:_____________

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24

Cursos: LEIC-A

TESTE 2 (VERSÃO B)

30 DE NOVEMBRO DE 2023, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- O teste deve ser resolvido a **caneta** (azul ou preta).

PERGUNTA	COTAÇÃO	CLASSIFICACAÇÃO
1	5	
2	5	
3	6	
4	4	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ____________ Curso: ____________ Sala: ____________

1. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) \;=\; \left(y^2 - x^2,\; z^2 - y^2\;, x^2 - z^2\right)\;.$$

   (a) (2 val.) Calcule $\operatorname{rot} F$.

   (b) (3 val.) Calcule a divergência do campo vectorial

$$G(x,y,z) \quad = \quad F(x,y,z) \;+\; \operatorname{rot} F(x,y,z)$$

2. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \ : \ z = y + 1 \ \ , x^2 + y^2 < 1\}$$

(a) (1 val.) Escreva uma parametrização para S.

(b) (2 val.) Calcule um vector unitário normal à superfície num ponto arbitrário da mesma.

(c) (2 val.) Calcule a área de S

3. Seja F o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (yz\ ,\ 2xy + \cos(x^2 - z^2)\ ,\ 2xz + \operatorname{sen}(y^2 - x^2))$$

(a) (2 val.) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de F através da superfície que é a fronteira do sólido

$$V = \{(x, y, z)\ : y^2 + z^2 < x < 2\}$$

na direção da normal exterior a V.

(b) (4 val.) Calcule o fluxo de F através da superfície

$$S\{(x, y, z)\ :\ y^2 + z^2 = x\ ,\ x < 2\}$$

na direcção da normal a S com primeira componente negativa.

4. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g(xy)(1+y^2) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) (1 val.) Mostre que este problema tem uma solução única numa vizinhança de $x_0 = 0$.

(b) (3 val.) Suponha que, adicionalmente, g satisfaz $g(u) \geq 1$ para qualquer $u \in \mathbb{R}$. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.