DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO UNIVERSIDADE DE LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/27

Cursos: LEIC-A, LEMec, LENO

Teste 1 (Versão A)

20 de Outubro de 2026, 19h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 1h.

1. Resolve os dois problemas de valor inicial indicando os respectivos intervalos máximos de existência de solução:

   (a) (1 val.) $y' = te^{-y}, \quad y(0) = 0;$

   (b) (1 val.) $x' + \dfrac{2x}{t} = t, \quad x(1) = 2, \quad t > 0$

   Resolução:

(a) A equação é equivalente a

$$e^y \frac{dy}{dt} = t,$$

que é uma equação separável. Assim sendo, a sua solução geral (na forma implícita) é dada por

$$\int e^y dy = \int t dt + c, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

ou seja:

$$e^y = \frac{t^2 + c}{2}.$$

Calculando c de forma a que $y(0) = 0$, obtém-se $c = 2$ e como tal

$$y(t) = \log \frac{2 + t^2}{2}.$$

Dado que $1 + t^2 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ conclui-se que a solução do PVI obtida está definida e é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e desta forma, $I_{\max} = \mathbb{R}$.

(b) Trata-se de uma equação linear, cujo factor integrante pode ser:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \log t} = t^2.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(t)$, obtém-se

$$t^2x' + 2tx = t^3$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(t^2x\right) = t^3.$$

Calculando as primitivas obtém-se (para $t \neq 0$):

$$t^2x(t) = \frac{t^4}{4} + c \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{c}{t^2} \qquad \text{onde } c \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta que $2 = x(1) = \frac{1}{4} + c$, temos que $c = \frac{7}{4}$, pelo que a solução do PVI é

$$x(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{7}{4t^2}$$

Dado que a função $x(t)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t_0 = 1 > 0$ conclui-se que $I_{\max} =]0, +\infty[$.

2. (1 val.) Calcule $\iint_S x\, dS$, onde

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right\}$$

Resolução:

A superfície S é o gráfico da função $f(x, y) = 1 - x - y$ definida no aberto

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, 0 < y, x + y < 1\}$$

e

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\iint_S x\, dS &= \iint_U x\sqrt{3}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x\sqrt{3}\, dydx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

3. (2 val.) Sejam $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\|(x, y, z)\right\| = 2 \text{ e } z \geq 0\right\}$ e

$$\mathbf{F}(x, y, z) \ = \ \left(xz^2,\ x^2y - z^3,\ zy^2\right).$$

Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através S segundo o vetor normal $\mathbf{n}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Resolução:

S é a superfície um hemisfério e atendendo a que

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xz^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y - z^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(zy^2\right) = z^2 + x^2 + y^2 = \rho^2$$

sendo ρ uma das coordenadas esféricas. Sendo assim vamos usar o Teorema da divergência para calcular o fluxo pedido. Dado que S não é uma superfície fechada vamos "fechar"a superfície de modo a poder aplicar o teorema da divergência. Assim, considere-se

$$\Sigma = S \cup T \quad \text{onde} \quad T = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 < 4 \text{ e } z = 0\}$$

orientado com a normal

$$\nu(x, y, z) = \begin{cases} (x, y, z)/2 & \text{se } (x, y, z) \in S \\ (0, 0, -1) & \text{se } (x, y, z) \in T \end{cases}$$

verificando se facilmente que se trata da normal exterior a Σ. Então. atendendo a que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$

$$\text{Fluxo}(F, \Sigma, \nu) = \iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, dS = \iiint_{V} \operatorname{div}\mathbf{F} \, dxdydz$$

onde V é o sólido limitado por Σ ou seja

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\|(x, y, z)\right\| \leq 2 \text{ e } z \geq 0\right\}.$$

Em coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad y = \rho\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = \rho\cos\varphi$$

com

$$0 < \rho < 2 \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \quad , \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Então

$$\text{Fluxo}(F, \Sigma, \nu) = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \rho^4 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho = \frac{64\pi}{5}$$

Por outro lado

$$\text{Fluxo}(F, \Sigma, \nu) = \text{Fluxo}(F, S, \nu) + \text{Fluxo}(F, T, (0, 0, -1))$$

Pelo que o fluxo pedido

$$\text{Fluxo}(F, S, \nu) = \frac{64\pi}{5} - \text{Fluxo}(F, T, (0, 0, -1))$$

Sendo

$$g(x, y) = (x, y, 0) \qquad , \qquad x^2 + y^2 < 4$$

uma parametrização para T, tem-se que

$$\text{Fluxo}(F, T, (0, 0, -1)) = \iint_{x^2+y^2<4} \left(0, x^2y, 0\right) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy = 0$$

e finalmente

$$\text{Fluxo}(F, S, \nu) = \frac{64\pi}{5}$$

4. Considere a superfície $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z = 2 + y\right\}$.

(a) (1 val.) Indique um vetor normal unitário S, ν.

(b) (1 val.) Escreva uma parametrização de $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 2 + y\}$ com o sentido compatível com ν.

(c) (1 val.) Sendo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2 z, x, z^2\right)$, calcule $\operatorname{rot} \mathbf{F}$.

(d) (1 val.) Calcule $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Resolução:

(**a**) A superfície pertence ao plano $z = 2+y$, e portanto um normal unitário é $\nu = (0, -1, 1)/\sqrt{2}$. O vetor $-\nu$ também é um vetor normal unitário.

(**b**) O bordo ∂S de S é o gráfico da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano pela função $f(x, y) = 2 + y$. Portanto ∂S tem uma parametrização $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2 + \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$. Esta parametrização é compatível com ν. A parametrização dada por $\sigma(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t)$ é compatível com o vetor $-\nu$.

(**c**) Tem-se

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 z & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, x^2, 1)$$

(**d**) Usando a orientação determinada por ν e o teorema de Stokes tem-se

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_S 1 - x^2 \, dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{x^2+y^2<1} (1 - x^2)\sqrt{2} \, dx dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos^2 \theta) r \, d\theta dr \\ &= \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

5. (1 val.) Seja S a superfície definida por $y = f(x, z)$, com $(x, z) \in K$ e f de classe C^1 definida num aberto limitado contendo K. Considerando que $\mathbf{n}$ é a normal unitária a S com segunda componente positiva e $F = (P, Q, R)$ é um campo vetorial contínuo em S, mostre que:

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_K \Big[-P\frac{\partial f}{\partial x} + Q - R\frac{\partial f}{\partial z}\Big] dx dz.$$

Deve completar o segundo membro da fórmula, escrevendo os argumentos das funções P, Q e R.

Resolução:

Uma parametrização para S é

$$g(x, z) = (x, f(x, z), z) \qquad , \qquad (x, z) \in K$$

Tem-se então que

$$\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_K F\,(x, f(x, z), z) \cdot N(x, z)\, dx dz$$

em que $\mathbf{n}$ é uma normal unitário a S, e que $\mathbf{N}$ pode ser calculada por

$$N = \pm\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial z} = \pm \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial z} & 1 \end{vmatrix} = \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x}, -1, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Dado que a normal considerada tem segunda componente positiva

$$N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, +1, -\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

pelo que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_K (P(x, f(x, z), z),\ Q(x, f(x, z), z), R(x, f(x, z), z)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, +1, -\frac{\partial f}{\partial z} \right) dx dz \\ &= \iint_K \Big[-P\frac{\partial f}{\partial x} + Q - R\frac{\partial f}{\partial z}\Big] dx dz. \end{aligned}$$

como pedido, onde P, Q e R são calculados em $(x, f(x, z), z)$.